Bölüm 7

Bir Halkanın Karakteristiği

Bu bölümde bir halkanın karakteristiği kavramını tanımlayacağız. Bazı halkaların karakteristiklerini bulup tamlık bölgesi olan halkaların karakteristikleri için önemli bir kriterden bahsedeceğiz.

7.1 Bir Halkanın Karakteristiği

Tanım 7.1.1 *R bir halka olsun. Her $x \in R$ için $nx = 0_R$ şartını sağlayan en küçük pozitif n tamsayısına R nin* **karakteristiği** *denir. Eğer bu şartı sağlayan pozitif bir tamsayı yoksa* **R nin karakteristiği sıfırdır** *denir. Bir R halkasının karakteristiği* **kar**(R) *ile gösterilir.*

Örnek 7.1.2 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ halkalarının her birinde her x elemanı için $nx = 0$ şartını sağlayan pozitif bir n tamsayısı olmadığından bu halkaların karakteristikleri sıfırdır. ▲

Örnek 7.1.3 $1 < n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere her $x \in \mathbb{Z}_n$ için $nx = \overline{0}$ olup bu şartı sağlayan en küçük pozitif tamsayı n olduğundan $\text{kar}(\mathbb{Z}_n) = n$ dir. ▲

Örnek 7.1.4 R bir Boole halkası olsun. Her $x \in R$ için $x + x = 2x = 0$ olması sebebiyle $\text{kar}(R) = 2$ dir. ▲

Teorem 7.1.5 *R birimli bir halka olsun.*

(i) *Eğer 1_R nin toplamsal mertebesi sonsuz ise* $\text{kar}(R) = 0$ *dır.*

(ii) *Eğer 1_R nin toplamsal mertebesi $n \in \mathbb{Z}^+$ ise* $\text{kar}(R) = n$ *dir.*

Örnek 7.1.6 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ birimli halkasının karakteristiğini bulalım. Bu halkanın birimi $(1, \bar{1})$ olduğundan $n\ (1, \bar{1}) = (0, \bar{0})$ olacak biçimde en küçük pozitif n tamsayısını bulacağız. $n\ (1, \bar{1}) = (0, \bar{0})$ ise ikililerin eşitliği tanımı gereğince $n = 0$ olur. Böylece $n\ (1, \bar{1}) = (0, \bar{0})$ eşitliğini sağlayan pozitif tamsayı mevcut olmadığından $\text{kar}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2) = 0$ dır. ▲

Örnek 7.1.7 $m,\ n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ birimli halkasının karakteristiğini bulalım. Bu halkanın birimi $([1]_m, [1]_n)$ dir.

$$o(([1]_m, [1]_n)) = \text{ekok}(o([1]_m), o([1]_n)) = \text{ekok}(m, n)$$

olması sebebiyle $\text{ekok}(m, n) \cdot ([1]_m, [1]_n) = ([0]_m, [0]_n)$ olup $\text{kar}(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n) = \text{ekok}(m, n)$ olur. ▲

Teorem 7.1.8 *Bir tamlık bölgesinin karakteristiği sıfır ya da asaldır.*

Sonuç 7.1.9 *Bir cismin karakteristiği sıfır ya da asaldır.*

Önerme 7.1.10 *Bir R halkasının karakteristiği sıfır ise R sonsuz çoklukta elemana sahiptir.*

Aşağıdaki örnek Önerme 7.1.10 un karşıtının doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 7.1.11 $X,\ Y \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ için $X + Y = (X \cup Y) \backslash (X \cap Y)$ ve $X \cdot Y = X \cap Y$ ile tanımlı işlemlerle $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}),\ +,\ \cdot)$ birimli halkasını göz önüne alalım. Bu halkanın birimi $\mathbb{Z}$ dir. Ayrıca $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} = \emptyset$ dir. Dolayısıyla $\text{kar}(\mathcal{P}(\mathbb{Z})) = 2$ dir. ▲

Teorem 7.1.12 *D bir tamlık bölgesi olsun. Eğer $kar(D) = 0$ ise, D nin $\mathbb{Z}$ ye izomorf bir althalkası, p asal sayı olmak üzere $kar(D) = p$ ise, D nin $\mathbb{Z}_p$ ye izomorf bir althalkası vardır.*

Teorem 7.1.13 *Her halka kendisiyle aynı karakteristiğe sahip birimli bir halka içine gömülebilir, yani bir R halkası için $kar(R)$ =$kar(S)$ ve R halkası S nin bir althalkasına izomorf olacak biçimde birimli bir S halkası vardır.*