Bölüm 8

Maksimal ve Asal İdealler

Bu bölümde bir halkanın maksimal ideali ve asal ideali kavramları incelenecektir. Birimli ve değişmeli halkalarda maksimal ideallerin ve asal ideallerin önemli karakterizasyonları verilecektir. Ele alınacak halkalarda halkanın sıfırından farklı en az bir eleman daha mevcut olduğu kabul edilecektir.

8.1 Maksimal İdealler

Tanım 8.1.1 *R bir halka ve R nin bir öz ideali M olsun. Eğer $M \subseteq I \subseteq R$ şartını sağlayan her I ideali için $I = M$ ya da $I = R$ ise M ye R nin bir* **maksimal ideali** *denir.*

Örnek 8.1.2 $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ halkasının bütün idealleri $\mathbb{Z}_6$, $\langle \bar{2} \rangle$, $\langle \bar{3} \rangle$ ve $\langle \bar{0} \rangle$ olup $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$ maksimal idealleridir. ▲

Teorem 8.1.3 *R birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere R nin her öz ideali R nin bir maksimal ideali tarafından kapsanır.*

Sonuç 8.1.4 *R birimli ve değişmeli bir halka olsun. Bir $x \in R$ için x in R nin bir maksimal idealine ait olması için gerek ve yeter şart x in tersinir olmamasıdır.*

Sonuç 8.1.5 *Her birimli ve değişmeli halkanın bir maksimal ideali vardır.*

Örnek 8.1.6 $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\mathbb{Z}$ halkasında $M = \langle m \rangle$ idealinin maksimal olması için gerek ve yeter şart m nin asal sayı olmasıdır. ▲

Örnek 8.1.7 $\mathbb{Z}$ halkasında $9\mathbb{Z}$ ideali maksimal değildir. Şimdi $3\mathbb{Z}$ halkasında $9\mathbb{Z}$ idealinin maksimal olup olmadığını araştıralım. $9\mathbb{Z} \subseteq I \subseteq 3\mathbb{Z}$ olacak şekildeki bir I ideali olsun. Bu durumda $I = \langle n \rangle$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}$ vardır. $\langle 9 \rangle \subseteq \langle n \rangle \subseteq \langle 3 \rangle$ olduğundan $9 \in \langle n \rangle$ olup $9 = nk$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan aşağıdaki durumlar elde edilir.

- Eğer $n = 1$ ise $1 \in 3\mathbb{Z}$ olup çelişki bulunur.
- Eğer $n = -1$ ise $-1 \in 3\mathbb{Z}$ olup çelişki bulunur.
- Eğer $n = 3$ ise $\langle n \rangle = \langle 3 \rangle = 3\mathbb{Z}$ dir.
- Eğer $n = -3$ ise $\langle n \rangle = \langle -3 \rangle = 3\mathbb{Z}$ dir.
- Eğer $n = 9$ ise $\langle n \rangle = \langle 9 \rangle = 9\mathbb{Z}$ dir.
- Eğer $n = -9$ ise $\langle n \rangle = \langle -9 \rangle = 9\mathbb{Z}$ dir.

Dolayısıyla $9\mathbb{Z}$ ideali $3\mathbb{Z}$ halkasında maksimaldir. ▲

Teorem 8.1.8 *R birimli ve değişmeli bir halka olsun. R nin bir M idealinin maksimal olması için gerek ve yeter şart R/M nin bir cisim olmasıdır.*

Örnek 8.1.9 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ halkasında $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ idealinin maksimal olup olmadığını araştıralım. $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ olsun. R halkası birimli ve değişmelidir. Ayrıca

$$R/M = \{x + M |\ x \in R\} = \{(m, n) + M |\ m,\ n \in \mathbb{Z}\} = \{(0, 0) + M,\ (0, 1) + M\}$$

olup $R/M \cong \mathbb{Z}_2$ dir. $\mathbb{Z}_2$ bir cisim olduğundan R/M halkası da bir cisimdir. Teorem 8.1.8 gereğince $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ ideali $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ halkasında maksimaldir. ▲

8.2 Asal İdealler

Tanım 8.2.1 *R değişmeli bir halka, $a,\ b \in R$ ve $a \neq 0$ olsun. Eğer $b = a \cdot c$ olacak şekilde $c \in R$ varsa a elemanı b yi* **böler** *denir ve $a \mid b$ ile gösterilir. Ayrıca a ya b nin bir* **böleni** *denir. Eğer a, b yi bölmüyorsa bu durum $a \nmid b$ ile gösterilir.*

Tanım 8.2.2 *R değişmeli bir halka ve hepsi birden sıfır olmayan $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \in R$ olsun. Eğer her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $d \mid a_i$ olacak şekilde $0 \neq d \in R$ varsa d ye bir* **ortak bölen** *denir. Ayrıca*

(i) *her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $d \mid a_i$,*

(ii) *her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $c \mid a_i$ olacak şekilde $0 \neq c \in R$ varsa $c \mid d$*

şartlarını sağlayan $d \in R$ ye $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \in R$ nin bir **en büyük ortak böleni** *adı verilir ve* $\mathrm{ebob}(a_1, \ldots, a_n)$ *ile gösterilir.*

Tanım 8.2.3 *R birimli ve değişmeli bir halka, $p \in R$ olmak üzere eğer*

(i) *$p \neq 0$ ve p tersinir değil,*

(ii) *$p \mid ab$ şartını sağlayan her $a,\ b \in R$ için $p \mid a$ veya $p \mid b$*

oluyorsa p ye R nin bir **asal elemanı** *denir.*

Tanım 8.2.4 *R değişmeli bir halka ve R nin bir ideali P olsun. Eğer her $a,\ b \in R$ için $ab \in P$ olması $a \in P$ veya $b \in P$ olmasını gerektiriyorsa P ye R nin bir* **asal ideali** *denir.*

Örnek 8.2.5 $\mathbb{Z}$ halkasında $3\mathbb{Z}$ ve $4\mathbb{Z}$ ideallerinin asal olup olmadığını araştıralım.

1. $a,\ b \in \mathbb{Z}$ için $ab \in 3\mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda $ab = 3k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece $3 \mid ab$ olup $3 \mid a$ veya $3 \mid b$ elde edilir. Dolayısıyla $a \in 3\mathbb{Z}$ veya $b \in 3\mathbb{Z}$ dir. Bu sebeple $3\mathbb{Z}$ ideali $\mathbb{Z}$ nin bir asal idealdir.

2. $2 \cdot 2 \in 4\mathbb{Z}$ olmasına rağmen $2 \notin 4\mathbb{Z}$ olduğundan $4\mathbb{Z}$ ideali $\mathbb{Z}$ nin bir asal ideali değildir.

▲

Örnek 8.2.6 $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ değişmeli halkasında $P = 2\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}$ idealinin asal olup olmadığını araştıralım. $(2,1),\ (1,5) \in R$ için $(2,1) \cdot (1,5) = (2,5) \in P$ olur. Fakat $(2,1) \notin P$ ve $(1,5) \notin P$ olduğundan P ideali R nin bir asal ideali değildir. ▲

Teorem 8.2.7 *R bir esas ideal bölgesi ve R nin sıfırdan farklı bir öz ideali P olsun. P nin asal ideal olması için gerek ve yeter şart $P = \langle p \rangle$ olacak şekilde $p \in R$ asal elemanının var olmasıdır.*

Teorem 8.2.8 *Birimli ve değişmeli bir halkada her maksimal ideal bir asal idealdir.*

Teorem 8.2.8 in karşıtının doğru olmadığı aşağıdaki örnekle görülmektedir.

Örnek 8.2.9 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ halkasının $I = \mathbb{Z} \times \{0\}$ idealini göz önüne alalım. I asal ideal olmasına rağmen $J = \mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ ideali için $I \subsetneq J \subsetneq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dir. Dolayısıyla I ideali $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ halkasında maksimal değildir. ▲

Teorem 8.2.10 *R bir esas ideal bölgesi olsun. R nin sıfırdan farklı bir öz idealinin asal olması için gerek ve yeter şart bu idealin maksimal olmasıdır.*

Teorem 8.2.11 *R birimli, değişmeli bir halka ve R nin bir öz ideali P olsun. P nin asal ideal olması için gerek ve yeter şart R/P nin bir tamlık bölgesi olmasıdır.*

Örnek 8.2.12 $(\mathbb{Z}_{18}, +, \cdot)$ halkasının bütün idealleri $I_1 = \langle \overline{0} \rangle$, $I_2 = \langle \overline{9} \rangle$, $I_3 = \langle \overline{6} \rangle$, $I_4 = \langle \overline{3} \rangle$, $I_5 = \langle \overline{2} \rangle$, $I_6 = \langle \overline{1} \rangle$ dir. Ayrıca $\mathbb{Z}_{18}$ birimli ve değişmeli bir halkadır. $\mathbb{Z}_{18}/I_4 \cong \mathbb{Z}_3$ ve $\mathbb{Z}_{18}/I_5 \cong \mathbb{Z}_2$ olup $\mathbb{Z}_{18}$ in bütün asal idealleri $I_4,\ I_5$ dir. ▲