Bölüm 9

Polinom Halkaları

Bu bölümde birimli halkalar üzerine kurulmuş polinomlar halkası ele alınacak ve bu halkanın temel özellikleri incelenecektir.

9.1 Polinom Halkaları

Tanım 9.1.1 *R birimli bir halka, x bir belirsiz, $n \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq i \leq n$ için $a_i \in R$ olmak üzere*

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$$

ifadesine R katsayılı x e göre bir **polinom** *denir. $0 \leq i \leq n$ için $a_i \in R$ elemanlarına $f(x)$ polinomunun* **katsayıları** *ve a_ix^i ye de $f(x)$ polinomunun* **terimleri** *adı verilir. R üzerinde x belirsizine göre bütün polinomların kümesi $R[x]$ ile gösterilir.*

Tanım 9.1.2 *R birimli bir halka, x bir belirsiz, $n,\ m \in \mathbb{N}$ ve*

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \in R[x]$$

$$g(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + \cdots + b_mx^m \in R[x]$$

olmak üzere eğer her $0 \leq i \in \mathbb{Z}$ için $a_i = b_i$ ise $f(x)$ ve $g(x)$ polinomları **eşittir** *denir ve $f(x) = g(x)$ ile gösterilir ($i > n$ için $a_i = 0$ ve $i > m$ için $b_i = 0$ şeklinde tanımlanır).*

Teorem 9.1.3 *R birimli bir halka, x bir belirsiz ve $n,\ m \in \mathbb{N}$ için*

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \in R[x],$$

$$g(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + \cdots + b_mx^m \in R[x]$$

olsun. $k = maks\{m, n\}$ *ve* $c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$ *olmak üzere*

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{k} (a_i + b_i) x^i,$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{m+n} c_i x^i$$

şeklinde tanımlı işlemlerle $(R[x], +, \cdot)$ *birimli bir halkadır. Bu halkaya* R *üzerindeki* **polinomlar halkası** *denir. Eğer* R *değişmeli ise* $R[x]$ *halkası da değişmelidir.*

Teorem 9.1.4 *R birimli bir halka olmak üzere $R[x]$ polinomlar halkası R ye izomorf olan bir althalka kapsar.*

Tanım 9.1.5 *R birimli bir halka ve $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \in R[x]$ olsun. a_i katsayılarının sıfırdan farklı olduğu en büyük k tamsayısına $f(x)$ polinomunun* **derecesi** *denir ve $\operatorname{der} f(x)$ ile gösterilir. Eğer her $0 \leq i \leq n$ için $a_i = 0$ ise $f(x)$ polinomunun derecesi $-\infty$ olarak tanımlanır. a_k ya $f(x)$ polinomunun* **başkatsayısı**, *a_0 a $f(x)$ polinomunun* **sabit terimi**, *R halkasının elemanlarına da* **sabit polinomlar** *denir.*

Örnek 9.1.6 $f(x) = \overline{2}x^3 + \overline{3}x + \overline{5}$, $g(x) = \overline{3}x + \overline{4} \in \mathbb{Z}_6[x]$ polinomları veriliyor. $f(x)$ polinomunun sabit terimi $\overline{5}$, başkatsayısı $\overline{2}$ ve $\operatorname{der} f(x) = 3$, $g(x)$ polinomunun sabit terimi $\overline{4}$, başkatsayısı $\overline{3}$ ve $\operatorname{der} g(x) = 1$ dir. ▲

Aşağıdaki örnekten de görüleceği gibi $R[x]$ halkasında keyfi $f(x)$ ve $g(x)$ polinomları için $\operatorname{der}(f(x) \cdot g(x)) = \operatorname{der} f(x) + \operatorname{der} g(x)$ olmak zorunda değildir.

Örnek 9.1.7 Örnek 9.1.6 da verilen $f(x)$ ve $g(x)$ polinomlarını göz önüne alalım. Bu durumda $\operatorname{der} f(x) + \operatorname{der} g(x) = 3 + 1 = 4$ olmasına rağmen $f(x) \cdot g(x) = \overline{2}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{3}x + \overline{2}$ olup $\operatorname{der}(f(x) \cdot g(x)) = 3$ tür. ▲

Teorem 9.1.8 *R bir tamlık bölgesi ve $0 \neq f(x), 0 \neq g(x) \in R[x]$ olsun. Bu durumda $\operatorname{der}(f(x) \cdot g(x)) = \operatorname{der} f(x) + \operatorname{der} g(x)$ dir.*

Teorem 9.1.9 *R birimli bir halka olsun. $R[x]$ halkasının tamlık bölgesi olması için gerek ve yeter şart R nin bir tamlık bölgesi olmasıdır.*

Örnek 9.1.10 F bir cisim olsun. $F[x]$ polinomlar halkasında çarpımsal tersi olan elemanlar sadece sıfır polinomundan farklı olan sabit polinomlar olduğundan $F[x]$ bir cisim değildir. ▲

Örnek 9.1.11 $\mathbb{Z}_2[x]$ polinomlar halkasında derecesi 2 olan bütün polinomları belirleyelim.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{Z}_2[x]$$

olsun. $\text{der} f(x) = 2$ olduğundan $a_2 \neq 0$ olmak zorundadır. Bu sebeple $a_2 = \overline{1}$ dir. a_0 ve a_1 katsayıları için 2 farklı seçim söz konusu olup $f(x)$ polinomu $2 \cdot 2 = 4$ farklı şekilde seçilebilir. Bu polinomlar $f(x) = x^2$, $f(x) = \overline{1} + x^2$, $f(x) = x + x^2$, $f(x) = \overline{1} + x + x^2$ dir. ▲

Örnek 9.1.12 $\mathbb{Z}[x]$ halkasında $I = \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] : f(0) = 5k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin bir ideal olup olmadığını araştıralım.

(1) $I \subset \mathbb{Z}[x]$ olduğu açıktır.

(2) $x + 5 \in I$ olduğundan $I \neq \emptyset$ dir.

(3) $f(x),\ g(x) \in I$ olsun. Bu durumda $f(0) = 5k_1$ ve $g(0) = 5k_2$ olacak şekilde $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ vardır. $f(0) - g(0) = 5k_1 - 5k_2 = 5k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ var olduğundan $f(x) - g(x) \in I$ dır.

(4) $f(x) \in I$ ve $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ olsun. $f(x) = 5k + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ ve $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ olmak üzere, $f(x)g(x) = g(x)f(x) = 5kb_0 + \cdots + a_nb_mx^{n+m}$ dir. Bu durumda $f(0)g(0) = g(0)f(0) = 5(kb_0)$ olacak şekilde $kb_0 \in \mathbb{Z}$ var olduğundan $f(x)g(x),\ g(x)f(x) \in I$ dır.

Dolayısıyla I kümesi $\mathbb{Z}[x]$ in bir idealidir. ▲

Örnek 9.1.13 $\mathbb{Z}[x]$ polinomlar halkasında $\langle x-2 \rangle$ idealinin maksimal ve asal olup olmadığını araştıralım. $\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$, $\phi(f(x)) = f(2)$ şeklinde tanımlanan ϕ bir halka homomorfizmasıdır ve

$$\begin{aligned} \text{Ker}\phi &= \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid \phi(f(x)) = 0\} \\ &= \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid f(2) = 0\} \\ &= \{(x-2)g(x) \mid g(x) \in \mathbb{Z}[x]\} \\ &= \langle x - 2 \rangle \end{aligned}$$

dir. $k \in \mathbb{Z}$ için $f(x) = k$ sabit polinomu alındığında $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ve $\phi(f(x)) = k$ olduğundan ϕ örtendir. Yani $\text{Im}\phi = \mathbb{Z}$ ve ϕ bir epimorfizmadır. Birinci İzomorfizma Teoremi gereğince $\mathbb{Z}[x]/\text{Ker}\phi \cong \mathbb{Z}$ dir. $Z[x]$ birimli ve değişmeli bir halka olup $\mathbb{Z}$ bir cisim olmadığından $\langle x-2 \rangle$ bir maksimal ideal değildir, fakat $\mathbb{Z}$ bir tamlık bölgesi olduğundan $\langle x - 2 \rangle$ ideali asaldır. ▲