



A.Ü. FEN FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ MAT302 CEBİR II ARASINAVI SORULARI ve ÇÖZÜMLERİ

1. $I = \{a + ib \mid a \in \mathbb{Z}, b \in 2\mathbb{Z}\}$ kümesi $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ Gauss tamsayılar halkasının bir ideali midir? Araştırmamız.

Çözüm: $1 + i \in \mathbb{Z}[i]$ ve $1 + 2i \in I$ için $(1 + i)(1 + 2i) = -1 + 3i \notin I$ olduğundan I kümesi $\mathbb{Z}[i]$ halkasının bir ideali değildir.

2. R değişmeli bir halka ve $\text{kar}(R) = 3$ olsun. $f : R \rightarrow R$, $f(a) = a^3$ fonksiyonu bir halka homomorfizması mıdır? Araştırmamız.

Çözüm: $a, b \in R$ için

$$\begin{aligned} f(a + b) &= (a + b)^3 && R \text{ değişmeli olduğundan} \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 && \text{kar}(R) = 3 \text{ olduğundan} \\ &= a^3 + b^3 \\ &= f(a) + f(b) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(ab) &= (ab)^3 && R \text{ değişmeli olduğundan} \\ &= a^3b^3 \\ &= f(a)f(b) \end{aligned}$$

olup f bir halka homomorfizmasıdır.

3. $R = \mathbb{Z}_{12}$ halkasının $I = \langle \bar{6} \rangle$ ideali veriliyor. R/I bölüm halkası sıfır bölensiz midir? Araştırmamız.

Çözüm: $\bar{0} + I \neq \bar{2} + I, \bar{0} + I \neq \bar{3} + I \in R/I$ için $(\bar{2} + I)(\bar{3} + I) = \bar{6} + I = \bar{0} + I$ olduğundan $\bar{2} + I$ ve $\bar{3} + I$ elemanları R/I nin birer sıfır böleneridir. Bu sebeple R/I halkası sıfır bölensizdir.

4. \mathbb{Z}_{30} halkasının $I = \langle \bar{10} \rangle$ ideali bir asal ideal midir? Araştırmamız.

Çözüm: $\bar{2}, \bar{5} \in \mathbb{Z}_{30}$ için $\bar{2} \cdot \bar{5} = \bar{10} \in I$ fakat $\bar{2} \notin I$ ve $\bar{5} \notin I$ olduğundan I ideali bir asal ideal değildir.