Bölüm 12

Polinomların Sıfırları ve İndirgenmezliği

Bu bölümde kompleks, reel, rasyonel ve tamsayı katsayılı polinomların sıfırlarını bulma ve indirgenmezliklerini araştırma ile ilgili önemli ve etkili bazı kriterler verilecektir.

12.1 Kompleks ve Reel Katsayılı Polinomların Sıfırları

Teorem 12.1.1 (Cebirin Temel Teoremi) *Kompleks katsayılı, pozitif dereceli her polinom en az bir kompleks sıfıra sahiptir.*

Teorem 12.1.2 *$f(x) \in \mathbb{C}[x]$ polinomunun derecesi $n \in \mathbb{Z}^+$ ve başkatsayısı a olsun. Eğer $f(x)$ polinomunun $\mathbb{C}$ içerisinde n tane farklı sıfırı $c_1,\ c_2, \dots,\ c_n$ ise*

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

dir.

Uyarı 12.1.3

(1) Teorem 12.1.2 de $i = 1, 2, \cdots, n$ için c_i ler birbirinden farklı olmak zorunda değildir. Eğer bazı c_i ler ortak ise bu durumda,

$$f(x) = a(x - c_1)^{n_1}(x - c_2)^{n_2} \cdots (x - c_r)^{n_r}$$

şeklinde yazılabilir. Bu sebeple kompleks katsayılı indirgenmez polinomlar birinci dereceden polinomlardır.

(2) $f(x)$ ikinci dereceden reel katsayılı bir polinom olsun. Bu durumda $f(x) = ax^2+bx+c$ olacak şekilde $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ vardır. Bu polinomun bütün sıfırları $r_1 = \dfrac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a}$ ve $r_2 = \dfrac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a}$ şeklindedir. $f(x)$ in $\mathbb{R}$ üzerinde indirgenmez olması için gerek ve yeter koşul $b^2 - 4ac < 0$ olmasıdır.

♦

Tanım 12.1.4 *E ve F iki cisim, $F \subseteq E$ olsun. $a \in E$ için $f(a) = 0$ olacak şekilde bir $f(x) \in F[x]$ bulunabiliyorsa o zaman a ya F üzerinde* **cebirseldir**, *aksi taktirde a ya F üzerinde* **transandantdır** *denir. Ayrıca, E üzerindeki her polinomun E içerisinde bir sıfırı varsa o zaman E ye* **cebirsel kapalıdır** *denir.*

Örnek 12.1.5

(1) Cebirin Temel Teoremi gereğince $\mathbb{C}$ cebirsel kapalıdır.

(2) $z = a + ib \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - (a + ib))(x - (a - ib)) \\ &= x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

olduğundan $f(x)$ reel katsayılı bir polinomdur ve $f(z) = 0$ dır. Bu sebeple z kompleks sayısı $\mathbb{R}$ cismi üzerinde cebirseldir.

▲

Teorem 12.1.6 *$f(x) \in \mathbb{R}[x]$ olmak üzere eğer $f(x)$ in bir kompleks sıfırı z ise $\overline{z}$ de $f(x)$ in bir sıfırıdır.*

Örnek 12.1.7 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8$ polinomunun bir sıfırının $1 - i$ olduğu biliniyor. $f(x)$ in diğer sıfırlarını bulalım. Verilen polinom reel katsayılı olduğundan $1 - i$ nin eşleniği $1 + i$ de bu polinomun bir sıfırıdır. Bu nedenle

$$(x - (1 - i))(x - (1 + i)) = x^2 - 2x + 2$$

polinomu $f(x)$ in bir çarpanıdır. Bölüm algoritmasından

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4)$$

olup $f(x)$ in diğer sıfırları $2i$ ve $-2i$ dir.

▲

Teorem 12.1.8 ($\mathbb{R}$ Üzerinde Çarpanlara Ayırma) *Reel katsayılı, pozitif dereceli her polinom bu polinomun başkatsayısı ile derecesi 1 ya da 2 olan sonlu sayıda monik indirgenmez polinomun çarpımı olarak yazılabilir.*

12.2 Rasyonel ve Tamsayı Katsayılı Polinomların Sıfırları

Teorem 12.2.1 *$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ ve $ebob(p, q) = 1$ olmak üzere $f(x)$ in bir rasyonel sıfırı $\frac{p}{q}$ olsun. Bu durumda $p \mid a_0$ ve $q \mid a_n$ dir.*

Örnek 12.2.2 $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomunun rasyonel sıfırlarını bulalım. Teorem 12.2.1 gereğince $p \mid 6$ ise $p = \pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ ve $q \mid 2$ ise $q = \pm1, \pm2$ olup $f(x)$ in rasyonel sıfır adayları

$$\pm\frac{1}{2}, \ \pm 1, \ \pm\frac{3}{2}, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \pm 6$$

şeklindedir. $f(\frac{1}{2}) = -\frac{15}{4}$, $f(1) = -2$, $f(\frac{3}{2}) = 0$ olduğundan

$$f(x) = (x - \frac{3}{2})(2x^3 - 2x^2 + 4) = (2x - 3)(x^3 - x^2 + 2)$$

elde edilir. $g(x) = x^3 - x^2 + 2$ ise, $g(x)$ in rasyonel sıfırları $\pm1, \pm2$ olabilir. $g(-1) = 0$ olup

$$g(x) = (x + 1)(x^2 - 2x + 2)$$

elde edilir. $h(x) = x^2 - 2x + 2$ polinomu için $\triangle = b^2 - 4ac < 0$ olduğundan $h(x)$ in rasyonel sıfırı yoktur. Sonuç olarak $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 6$ polinomunun rasyonel sıfırları $\frac{3}{2}$ ve -1 dir. ▲

Tanım 12.2.3 *$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ olmak üzere eğer $ebob(a_0, a_1, \cdots, a_n) = 1$ ise $f(x)$ polinomuna bir* **ilkel polinom** *denir.*

Teorem 12.2.4 *Eğer $g(x)$ ve $h(x)$ ilkel polinomlar ise $g(x)h(x)$ de bir ilkel polinomdur.*

Teorem 12.2.5 (Gauss Lemma) *$f(x)$ bir ilkel polinom olmak üzere eğer $f(x) = g(x)h(x)$ olacak şekilde pozitif dereceli $g(x), \ h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinomları varsa $f(x) = G(x)H(x)$ olacak şekilde pozitif dereceli $G(x), \ H(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinomları vardır.*

Sonuç 12.2.6 *$f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ilkel polinomu $\mathbb{Q}$ üzerinde indirgenebilir ise $\mathbb{Z}$ üzerinde de indirgenebilirdir.*

Örnek 12.2.7 $f(x) = 6x^2 + x - 2 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomu $\mathbb{Q}[x]$ içinde $f(x) = (3x - 3/2)(2x + 4/3)$ şeklinde çarpanlarına ayırılır. Gauss Lemma'nın ispatında izlenen yol yardımıyla $f(x) = (2x - 1)(3x + 2)$ ayrışımı elde edilir. ▲

Tamsayı Katsayılı Polinomlar İçin İndirgenmezlik Kriterleri

Teorem 12.2.8 (Mod p İndirgenmezlik Kriteri) *$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ ve $\operatorname{der} f(x) > 1$ olsun. Eğer $\bar{f}(x) = \overline{a_0} + \overline{a_1}x + \cdots + \overline{a_n}x^n \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinomu $\mathbb{Z}_p$ üzerinde indirgenmez ve $\operatorname{der} f(x) = \operatorname{der}\bar{f}(x)$ olacak şekilde bir p asalı varsa $f(x)$ polinomu $\mathbb{Q}$ üzerinde indirgenmezdir.*

Örnek 12.2.9 $f(x) = \frac{5}{7}x^3 - \frac{1}{2}x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinomunu göz önüne alalım. Bu durumda $14 \cdot f(x) = f_1(x) = 10x^3 - 7x + 14$ olur. $\mathbb{Z}_3[x]$ halkasında $\bar{f}_1(x) = x^3 - x + \bar{2}$ polinomu bir sıfıra sahip olmadığından $\bar{f}_1(x)$ polinomu $\mathbb{Z}_3$ üzerinde indirgenmezdir. Mod p İndirgenmezlik Kriteri gereğince $14 \cdot f(x)$ polinomu $\mathbb{Q}$ üzerinde indirgenmezdir. Fakat $\mathbb{Q}$ içinde 14 tersinir olduğundan $f(x)$ polinomu $\mathbb{Q}$ üzerinde indirgenmezdir. ▲

Teorem 12.2.10 (Eisenstein İndirgenmezlik Kriteri) *$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Eğer $p \mid a_0,\ p \mid a_1, \ldots,\ p \mid a_{n-1}$ fakat $p \nmid a_n$ ve $p^2 \nmid a_0$ olacak şekilde bir p asal sayısı varsa $f(x)$ polinomu $\mathbb{Q}$ üzerinde indirgenmezdir.*

Örnek 12.2.11 $f(x) = 7x^4 + 25x^2 - 15x + 10 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomunu göz önüne alalım. $p = 5$ asal sayısı için $p \mid 10,\ p \mid -15,\ p \mid 25$ fakat $p \nmid 7$ ve $p^2 \nmid 10$ olduğundan Eisenstein İndirgenmezlik Kriteri gereğince $f(x)$ polinomu $\mathbb{Q}$ üzerinde indirgenmezdir. Bu sebeple verilen polinomun rasyonel sıfırı yoktur. ▲

Örnek 12.2.12 $f(x) = 10x^6 - 10x^5 - 27x^4 + 39x^3 - 12x^2 + 6x - 6 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomunun bütün rasyonel sıfırlarını bulalım. Teorem 12.2.1 gereğince verilen polinom için rasyonel sıfır adaylarının kümesi

$$\{\pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{5},\ \pm\frac{1}{10},\ \pm 2,\ \pm\frac{2}{5},\ \pm 3,\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{3}{5},\ \pm\frac{3}{10},\ \pm 6,\ \pm\frac{6}{5}\}$$

şeklindedir. $f(1) = 0$ olup $f(x)$ polinomu $(x-1)$ çarpanına bölündüğünde bölüm $g(x) = 10x^5 - 27x^3 + 12x^2 + 6$ şeklindedir. $p = 3$ alınırsa bu polinom Eisenstein İndirgenmezlik Kriteri gereğince $\mathbb{Q}$ da indirgenmezdir. Bu sebeple $f(x)$ in rasyonel sıfırı sadece 1 olur. ▲