

Daha açık olarak,  $\odot$  sembolü, dört temel aritmetik işlemi  $+$ ,  $-$ ,  $*$ , veya  $\div$  den herhangi birini temsil etsin.

Eğer,  $x$  ve  $y$  makine sayıları olmak üzere  $x \odot y$  hesaplanacak ve yüklenecek ise, bu durumda tek bir makine kelimesine uyacak şekilde  $x \odot y$  yi yerleştirmek için yapabileceğimiz en iyi şey, onu  $\text{fl}(x \odot y)$  ye yuvarlamak ve o sayıyı yerleştirmektir.

**Örnek:** Yukarıdaki süreci açıklamak için, kayan-noktalı sayı sisteminde beş desimal nokta ile işlem yapan bir desimal makine kullanalım ve iki makine sayısı

$$x = 0.31426 \times 10^3 \quad y = 0.92577 \times 10^5$$

in toplamında, farkında, çarpımında ve bölümündeki bağıl hataları belirleyelim.

**Çözüm** Ara sonuçlar için bir çift-uzunluklu işlemci kullanırsak

$$x + y = 0.92891\ 26000 \times 10^5$$

$$x - y = -0.92262\ 74000 \times 10^5$$

$$x * y = 0.29093\ 24802 \times 10^8$$

$$x \div y \approx 0.33945\ 79647 \times 10^{-2}$$

buluruz. Beş desimal noktalı bilgisayar, yuvarlanmış formda bunları

$$\text{fl}(x + y) = 0.92891 \times 10^5$$

$$\text{fl}(x - y) = -0.92263 \times 10^5$$

$$\text{fl}(x * y) = 0.29093 \times 10^8$$

$$\text{fl}(x \div y) = 0.33946 \times 10^{-2}$$

olarak yükler. Bu sonuçlardaki bağıl hatalar, sırası ile  $2.8 \times 10^{-6}$ ,  $2.8 \times 10^{-6}$ ,  $8.5 \times 10^{-6}$ , ve  $6.0 \times 10^{-6}$  olup, hepsi de  $10^{-5}$  den küçüktür.

$$\text{fl}(x) = x(1 + \delta) \quad |\delta| \leq 2^{-24}$$

Böylece, eğer  $x$  ve  $y$  makine sayıları ise,

$$\text{fl}(x \odot y) = [x \odot y](1 + \delta) \quad |\delta| \leq 2^{-24}$$

Eğer  $x$  ve  $y$  nin makine sayıları olması gerekmiyorsa, karşılık gelen sonuç:

$$\text{fl}(\text{fl}(x) \odot \text{fl}(y)) = (x(1 + \delta_1) \odot y(1 + \delta_2))(1 + \delta_3) \quad |\delta_i| \leq 2^{-24}$$

$x$ ,  $y$  ve  $z$  nin  $\text{Manc-32}$  de makine sayıları olduklarını varsayalım ve  $x(y+z)$  yi hesaplamak isteyelim.

$$\begin{aligned}\text{fl}[x(y+z)] &= [x \text{fl}(y+z)](1+\delta_1) & |\delta_1| &\leq 2^{-24} \\ &= [x(y+z)(1+\delta_2)](1+\delta_1) & |\delta_2| &\leq 2^{-24} \\ &\approx x(y+z)(1+\delta_2+\delta_1+\delta_1\delta_2) \\ &\approx x(y+z)(1+\delta_1+\delta_2) \\ &= x(y+z)(1+\delta_3) & |\delta_3| &\leq 2^{-23}\end{aligned}$$

dir, çünkü  $\delta_2\delta_1$  değeri  $2^{-23}$  ile karşılaştırıldığında gözardı edilebilir.

## Örnek (Duyarlılık Kaybı)

$$\begin{aligned}x &= 0.37214\ 78693 \\y &= 0.37202\ 30572 \\x - y &= 0.00012\ 48121\end{aligned}$$

Eğer bu hesap beş-rakam mantissalı bir desimal bilgisayarda gerçekleştirilirse, bu durumda

$$\begin{aligned}\text{fl}(x) &= 0.37215 \\ \text{fl}(y) &= 0.37202 \\ \text{fl}(x) - \text{fl}(y) &= 0.00013\end{aligned}$$

olur. Bu durumda, bağıl hata oldukça büyüktür:

$$\left| \frac{x - y - [\text{fl}(x) - \text{fl}(y)]}{x - y} \right| = \left| \frac{0.00012\ 48121 - 0.00013}{0.00012\ 48121} \right| \approx \%4$$

Eğer bir sayısal sürecin bir adımında yapılan küçük hatalar ardışık adımlarda büyüyorsa ve hesaplamanın tamamındaki duyarlılığı ciddi olarak azaltıyorsa, bu sayısal süreç **kararsızdır**.

Reel sayıların, ardışık olarak

$$\begin{cases} x_0 = 1 & x_1 = \frac{1}{3} \\ x_{n+1} = \frac{13}{3}x_n - \frac{4}{3}x_{n-1} & (n \geq 1) \end{cases} \quad (1)$$

ile tanımlı dizisini göz önüne alalım. Bu indirgeme bağıntısının

$$x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (2)$$

dizisini oluşturduğu kolayca görülebilir.



$$x_0 = 1.00000\ 00$$

$$x_1 = 0.33333\ 33 \quad (\text{yuv. 7 rak. doğru})$$

$$x_2 = 0.11111\ 12 \quad (\text{yuv. 6 rak. doğru})$$

$$x_3 = 0.03703\ 73 \quad (\text{yuv. 5 rak. doğru})$$

$$x_4 = 0.01234\ 56 \quad (\text{yuv. 4 rak. doğru})$$

$$x_5 = 0.00411\ 87 \quad (\text{yuv. 3 rak.})$$

$$x_6 = 0.00138\ 57 \quad (\text{yuv. 2 rak.})$$

$$x_7 = 0.00051\ 31 \quad (\text{yuv. 1 rak.})$$

$$x_8 = 0.00037\ 57 \quad (\text{yuv. 0 rak.})$$

$$x_9 = 0.00094\ 37$$

$$x_{10} = 0.00358\ 87$$

$$x_{11} = 0.01429\ 27$$

$$x_{12} = 0.05715\ 02$$

$$x_{13} = 0.22859\ 39$$

$$x_{14} = 0.91437\ 35$$

$$x_{15} = 3.65749\ 3 \quad (10^8 \text{ bağıl hata ile yanlış})$$