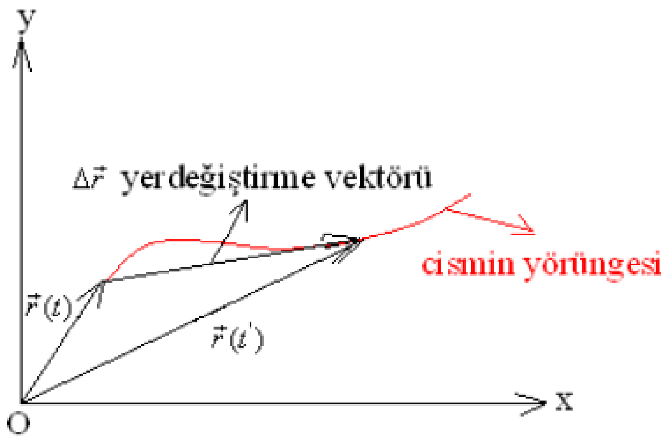
4. İKİ BOYUTTA HAREKET



$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$$

$$\vec{r}(t') = x(t')\hat{x} + y(t')\hat{y}$$

$\vec{r}(t)$ = t anında cismin O ya göre konum vektörü

$\vec{r}(t^{'})$ = $t^{'}$ anında cismin O ya göre konum vektörü

Yer değiştirme vektörü;

$$\delta\vec{r} = \vec{r}(t^{'}) - \vec{r}(t) \ ; \ t^{'} > t$$

olarak verilir. Şimdi $\vec{v}(t)$ hız ifadesini türetelim:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}(x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}) = \frac{dx(t)}{dt}\hat{x} + x(t)\frac{d\hat{x}}{dt} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{y} + y(t)\frac{d\hat{y}}{dt}$$

$\hat{x}$ ve $\hat{y}$; kartezyen koordinatlarda konum ve zamana göre değişmez. Dolayısıyla; zamana göre türevleri sıfır gelir. Bu durumda denklem;

$$\vec{v} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{x} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{y}$$

şeklinde olacaktır.

a) Sabit İvmeli 2- Boyutlu Hareket

$\vec{a}(t)$ = sabit ise bu harekete sabit ivmeli hareket adı verilmektedir. İki boyutta ivme ifadesi;

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$$

şeklindedir. Burada ivmenin bileşenleri olan a_x ve a_y büyüklükleri sabit olacaktır.

Hız denklemi;

$$\vec{v}(t) = \vec{v_x}(t)\hat{x} + \vec{v_y}(t)\hat{y}$$

şeklindedir. Buradan ivme ifadesi;

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}v_x(t)\hat{x} + \frac{d}{dt}v_y(t)\hat{y}$$

şeklinde yazılacaktır. Yukarıda yazdığımız iki boyutta ivme ifadesini eşitlikte yerine yazarsak;

$$a_x\hat{x} + a_y\hat{y} = \frac{dv_x}{dt}\hat{x} + \frac{dv_y}{dt}\hat{y}$$

eşitliği elde edilir. Burada ayrı ayrı bileşenleri eşitlersek;

$$a_x = \frac{dv_x(t)}{dt}$$
$$a_y = \frac{dv_y(t)}{dt}$$

olarak bulunur. Burada a_x ve a_y büyüklükleri sabit sayılardır. Bu eşitliklerden hız bileşenleri;

$$v_x(t) = v_x(t=0) + a_x t$$

$$v_y(t) = v_y(t=0) + a_y t$$

şeklinde bulunur. Hız vektörü ise;

$$\vec{v}(t) = (v_{x0} + a_x t)\hat{x} + (v_{y0} + a_y t)\hat{y}$$

şeklindedir. Bu eşitlikte;

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{x} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{y} = (v_{xo} + a_x t)\hat{x} + (v_{yo} + a_y t)\hat{y}$$

şeklinde yazılabilir ve ayrı ayrı bileşenler incelendiğinde buradan da konumun bileşenleri;

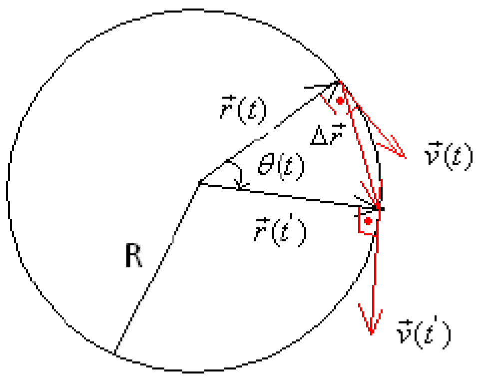
$$x(t) = x_0 + v_{xo}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \ ; \ y(t) = y_0 + v_{yo}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

şeklinde bulunur. Buradan da iki boyutta sabit ivmeli hareket için yörünge denklemi;

$$\vec{r}(t) = (x_0 + v_{xo}t + \frac{1}{2}a_x t^2)\hat{x} + (y_0 + v_{yo}t + \frac{1}{2}a_y t^2)\hat{y}$$

şeklinde olacaktır.

b) Düzgün Çembersel Hareket



$\vec{r}(t)$: t anında cismin konumu,

$\vec{r}(t')$: t' anında cismin konumudur.

i) Çembersel hareket koşulu;

$|\vec{r}(t)| = |\vec{r}(t')| = R$ dir. Burada R çemberin yarıçapıdır.

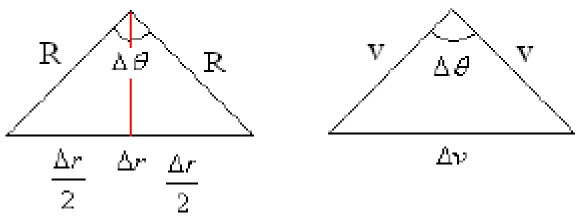
ii) Düzgün hareket koşulu;

$|\vec{v}(t)| = |\vec{v}(t')| = v$ dir. Yön değişse de sürat değişmez.

Yukarıdaki şekillerde;

$$0 < \Delta\theta < 10^0$$

küçük açı yaklaşımı kullanıldığında;



$$sin\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\Delta r}{2R}$$
$$(\frac{\Delta\theta}{2}) - \frac{1}{3!}(\frac{\Delta\theta}{2})^2 + ... = \frac{\Delta r}{2R}$$

birinci mertebeden sonraki ifadeler ihmal edildiğinde;

$$\Delta r = \Delta\theta R$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde;

$$\Delta v = v\Delta\theta$$

ifadesi de elde edilebilir. Her iki tarafın limiti alındığında;

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\Delta\theta}{\Delta t}$$
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\Delta\theta}{\Delta t}$$

olacaktır. Burada bir tanım yapmamız gerekmektedir.

Tanım: $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta(t)}{dt}$ ifadesine açısal hız denmektedir.

Limit ifadelerinin birincisinden;

$$\frac{dr}{dt} = v = Rw$$

ifadesi elde edilir. İkincisi kullanılarak;

$$\frac{dv}{dt} = a_{merk} = vw = \frac{v^2}{R}$$

ifadeleri elde edilir.