SAYIM İSTATİSTİĞİ VE HATA TAHMİNİ

Prof. Dr. Doğan BOR

Konu 11

Ölçüm Hataları

Basit hatalar: ????

Sistematik Hatalar : Standartların kullanılması

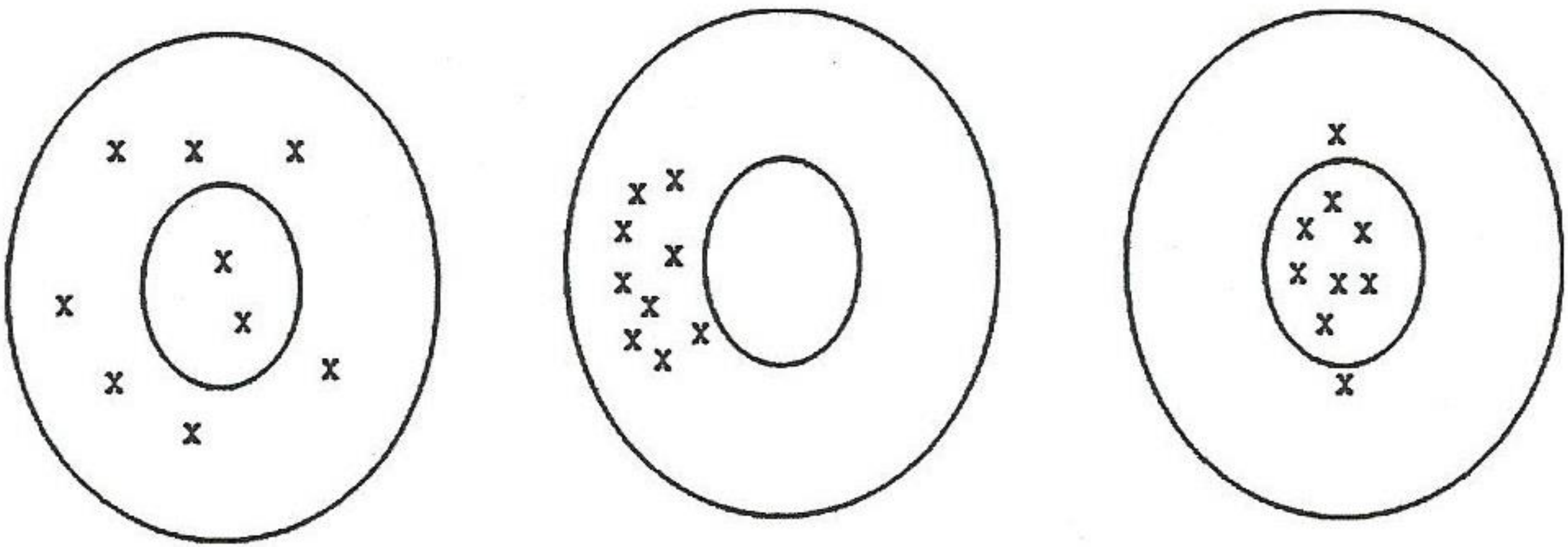
Tesadüfi Hatalar:

- Ölçülen büyüklüğün doğasından
- Ölçülen sistemin fiziksel sınırlamalarından
- Ölçümlerin tekrarlanmasında ki doğruluk

Ölçüm Hataları

Doğruluk

Kesinlik



Doğruluk ve kesinlik yok | Doğruluk yok kesinlik var | Doğruluk ve kesinlik var

BİLGİLERİN KARAKTERİZASYONU

N tane bağımsız ölçümünün yapıldığını kabul edelim.

x_1, x_3, x_4, … x_i …….x_n

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i}^{N} x_i$$

Ortalama

$$\bar{x} = \frac{\sum_i^N w_i x_i}{\sum_i^N w_i}$$

Ağırlıklı ortalama

ORTALAMA (MEAN) VE MEDYAN

34, 30, 28, 33, 29, 30, 31, 255, 27, 35, 29, 255, 33, 32, 28,30

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 58.7 \quad \text{with all values} \\ \bar{x} &= 30.6 \quad \text{with two erroneous data points excluded} \end{aligned}$$

For median we write the data in ascending order.

27, 28, 28, 29, 29, 30, 30, 30, 31, 32, 33, 33, 34, 35, 255, 255

Since there are two central values therefore the median will be their mean.

$$\text{Median} = \frac{30 + 31}{2} = 30.5$$

If we exclude the two erroneous data points then the median will be

$$\text{Median} = \frac{30 + 33}{2} = 30.$$

BİLGİLERİN KARAKTERİZASYONU

Çoğu zaman bilgilerin temsil edilmesi ona karşı gelen frekans dağılım fonksiyonu F(x) ile yapılır

$$F(x) = \frac{\text{X değerinin gözlenme sayısı}}{\text{Ölçümlerin sayısı (N)}}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} F(x) = 1$$

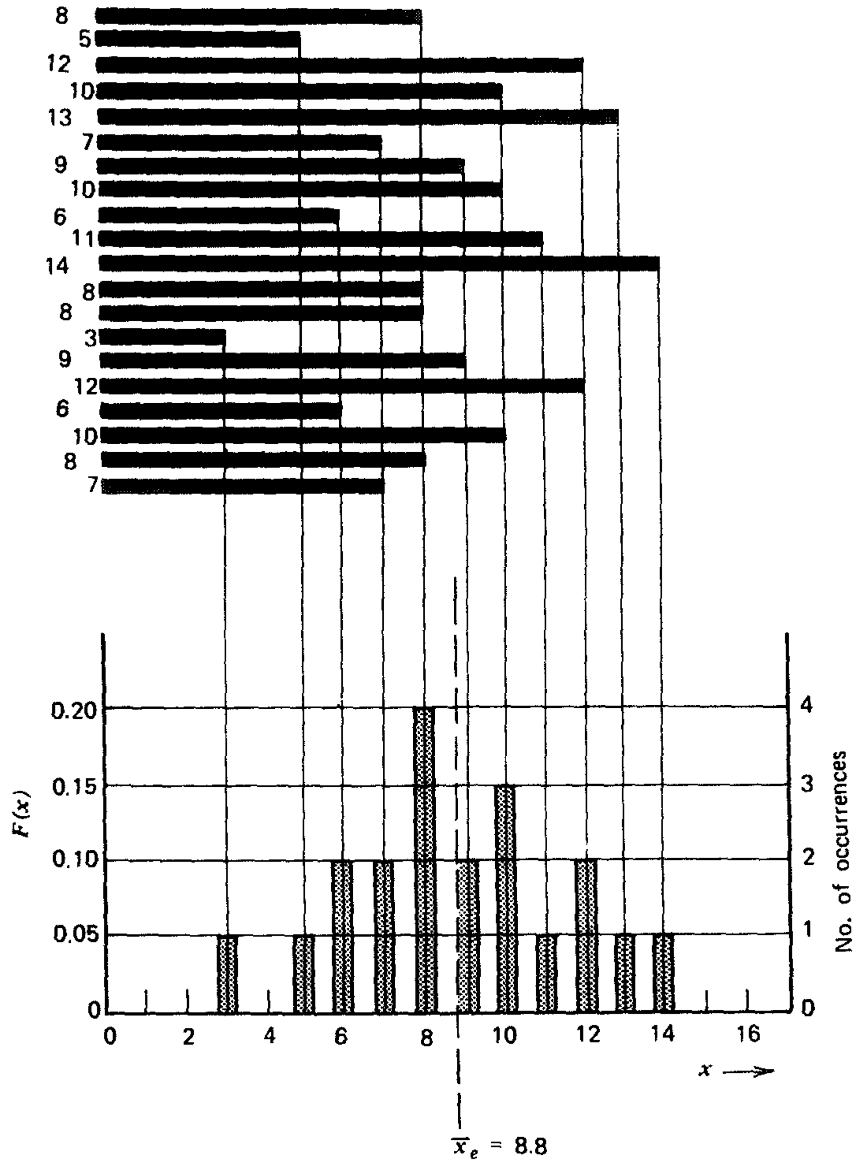
FREKANS DAĞILIM FONKSİYONU

Bilgi		**Frekans Dağılım Fonksiyonu**
8	14	F(3)= 1/20 = 0.05
5	8	F(4)= 0.00
12	8	F(5)= 0.05
10	3	F(6)= 0.10
13	9	F(7)= 0.10
7	12	F(8)= 0.20
9	6	F(9)= 0.10
10	10	F(10)= 0.15
6	8	F(11)= 0.05
11	7	F(12)= 0.10
		F(13)= 0.05
		F(14)= 0.05

$$\sum_{x=0}^{\infty} F(x) = 1$$

Deneysel Ortalama = 8.8

FREKANS DAĞILIM FONKSİYONU

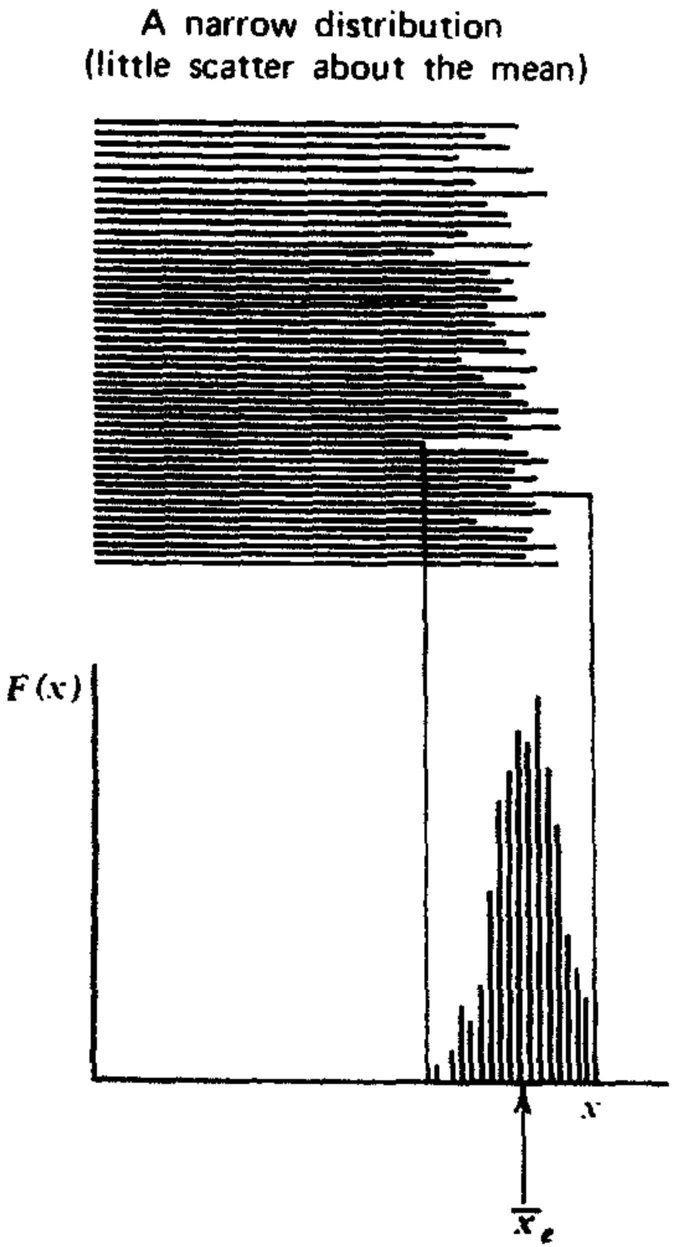


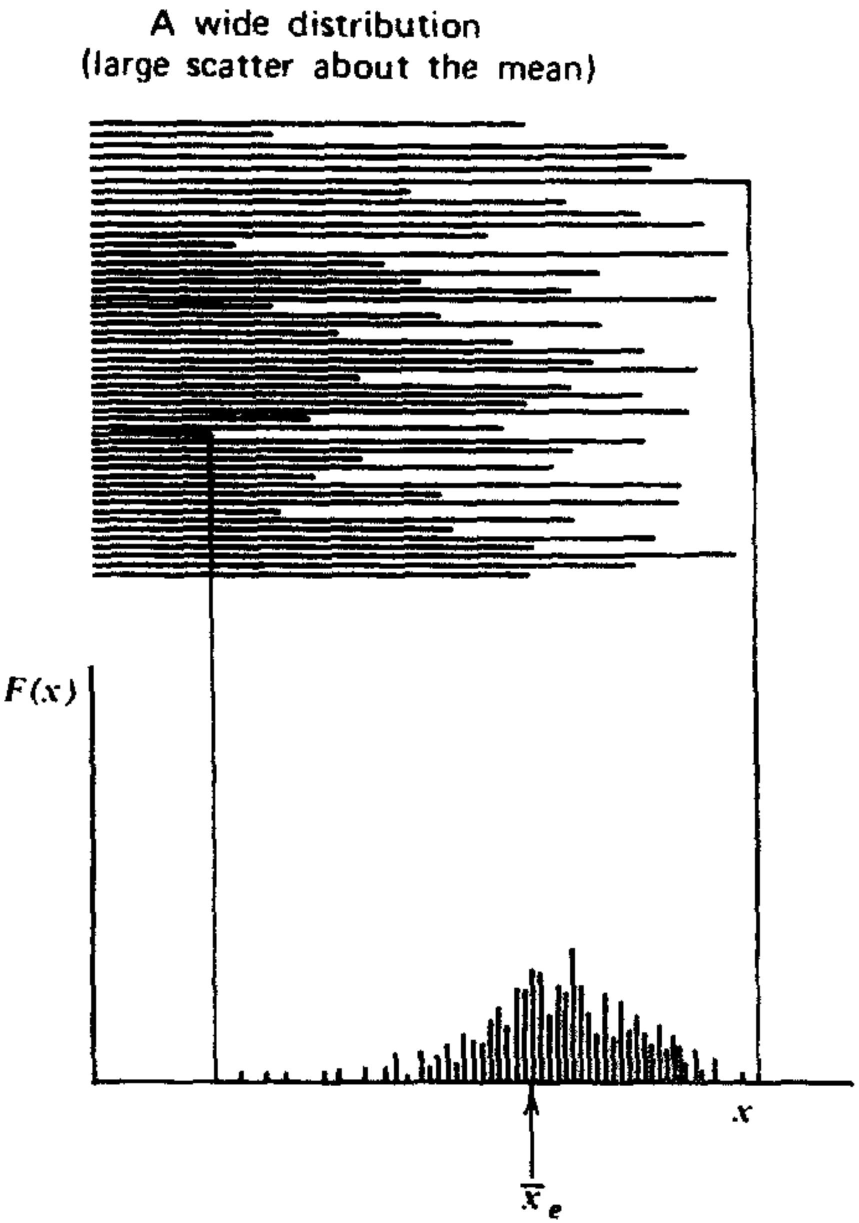
8 için 4/20 = 0.2

10 için 3/20 = 0.15

Tablodaki bilgiler için dağılım fonksiyonu

İKİ FARKLI BİLGİ DİZİSİ İÇİN DAĞILIM FONKSİYONLARI





FREKANS DAĞILIM FONKSİYONU

Herhangi bir dağılımın ortalaması basitçe onun ilk momenti olduğuna göre bilgi dağılım fonksiyonu kullanılarak deneysel ortalama hesaplanabilir.

$$\bar{x}_e = \sum_{x=0}^{\infty} x\, F(x)$$

Bir bilgi noktasının ortalama değerden ne kadar farklı olduğunu gösteren sapma,

$$\epsilon_i \equiv x_i - \bar{x}$$

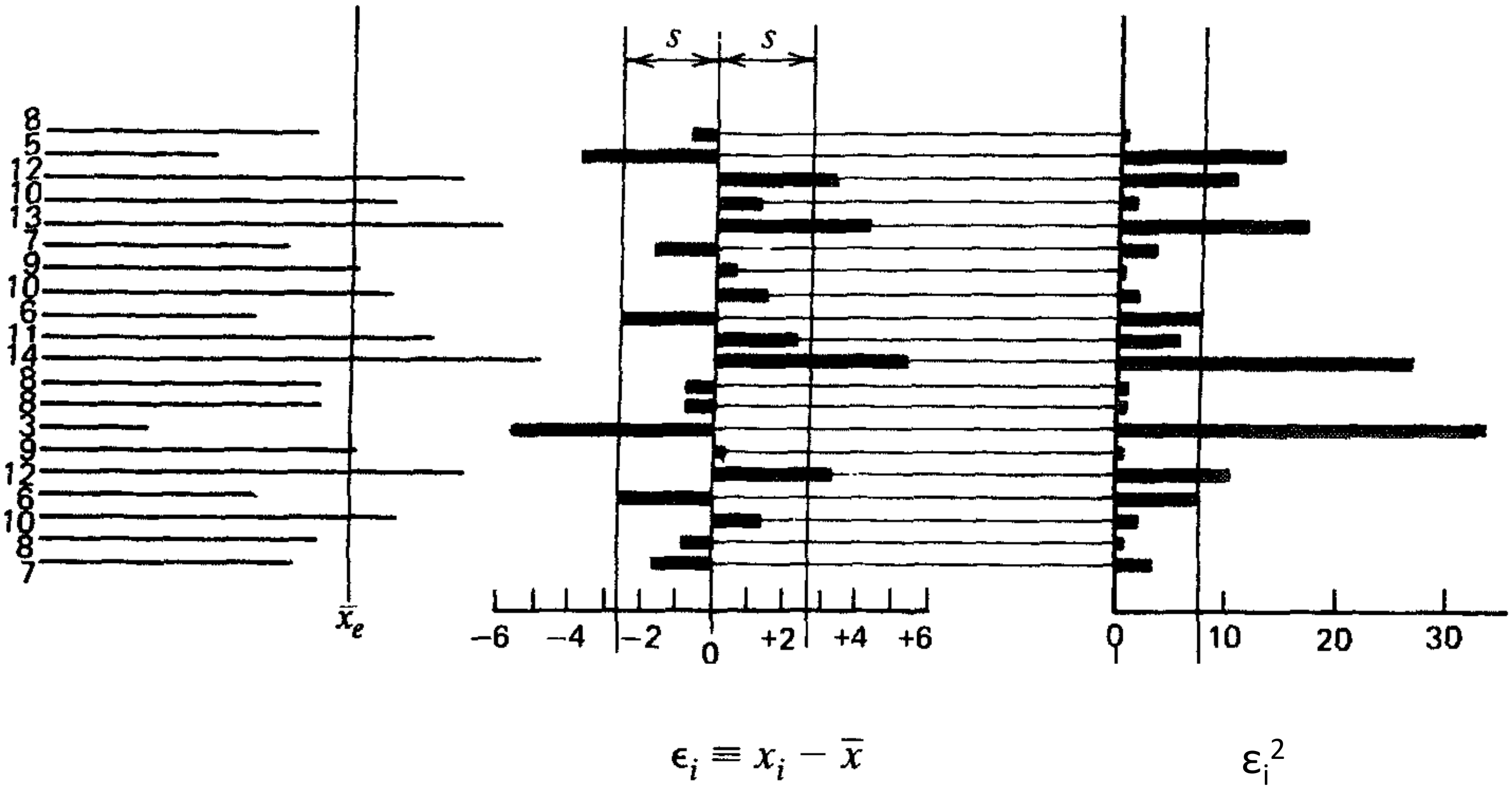
Örnek variyans (S^2),

$$\sum_{1}^{N} \varepsilon_i^2 = 0$$

$$S^2 = \frac{1}{(N-1)} \sum_{1}^{N} \varepsilon_i^2$$

S^2 terimi orijinal bilgi dizisindeki doğal dalgalanmaların derecesini gösteren tek bir indeks olarak kullanılmaktadır.

Tablodaki bilgilerin çizimi ε_i ve ε_i^2'ye karşı gelen değerler



SONUÇ

Deneysel bilgilerin organizasyonu :

1. Tüm bilgi dizileri frekans dağılım fonksiyonları ile tanımlanabilir.

2. Bu frekans dağılım fonksiyonunun iki önemli özelliği; deneysel ortalama ve örnek variyanstır.

Deneysel ortalama dağılımın merkezlendiği değer, örnek variyans ise dağılımın genişliği ya da bilgideki doğal dalgalanmaların miktarıdır.

DENEME VE TANIMLANAN BAŞARILAR

Deneme	**Tanımlanan Başarı**	**Başarı Oranı(P)**
- Para Atma	Kura	1/2
- Zar Atma	Altı	1/6
- t zamanı için radyoaktif bir çekirdeğin gözlenmesi	Gözlem sırasında parçalanan çekirdek sayısı	$1 - e^{-\lambda t}$

İSTATİSTİKSEL MODELLER

Binom Dağılımı: En genel model olup sabit - P işlemlerinin hepsine uygulanabilir.

Poisson Dağılımı: Bu model başarı olasılığı P'nin küçük olması durumunda binom dağılımının matematik olarak basitleştirilmesidir.

Gauss veya Normal Dağılım: Eğer başarıların ortalama sayısı rölatif olarak büyükse (20 veya 30'dan büyük) yine binom dağılımının daha da basitleştirilmesinden elde edilir.

BİNOM DAĞILIMI

Eğer **n** denemelerin sayısı ve **p** her denemenin başarı olasılığı ise, tam olarak **x** başarısının sayılması olasılığının önceden tahmin edilmesi aşağıdaki gibi verilir.

$$P(x) = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^{x} (1-p)^{n-x}$$

$$\sum_{x=0}^{10} P(x) = 1$$

$$\bar{x} = \sum_{x=0}^{n} x P(x) \qquad \bar{x} = pn$$

$$\sigma = \sqrt{\bar{x}\,(1-p)}$$

σ^2 : Varyans

σ : Standart sapma

BİNOM DAĞILIMI

Zar atışında 3,4,5 ve 6' nın gelme olasılığı başarı olarak kabul edilirse ;

X	**P(x)**
0	0.00002
1	0.00034
2	0.00305
3	0.01626
4	0.05690
5	0.13656
6	0.22761
7	0.26012
8	0.19509
9	0.08671
10	0.01734

P= 4/6 ve n=10 parametreleri için 10 atıştan 8 tanesinde 3,4,5,6 gelme olasılığı

$$\bar{x} = \frac{2}{3} \times 10 = 6{,}67$$

$$X = 8\, için;\, P(8) = \frac{10!}{(10-8)!8!}(2/3)^8(1-2/3)^2 = 0{,}19$$

(10 atıştan 6 tanesinin 3,4,5,6 gelme olasılığı 0.22, 10 atıştan hepsinin 3,4,5,6 gelme olasılığı 0.017 dir)

POİSSON DAĞILIMI

Denemelerin sayısı (n) sonsuz ve olasılığın ortaya çıkmasının çok düşük olduğu (p<< 1) bu dağılım kullanılır.

$$P(x) = \frac{(pn)^x e^{-pn}}{x!}$$

$$P(x) = \frac{(\bar{x})^x e^{-\bar{x}}}{x!}$$

POİSSON DAĞILIMININ BAZI ÖZELLİKLERİ

- Poisson dağılımı da normalize edilebilir.

$$\sum_{X=0}^{n} P(x) = 1$$

- Dağılımın ortalama değeri ya da ilk momenti hesaplanabilir.

$$\bar{x} = \sum_{X=0}^{n} xP(x) = pn$$

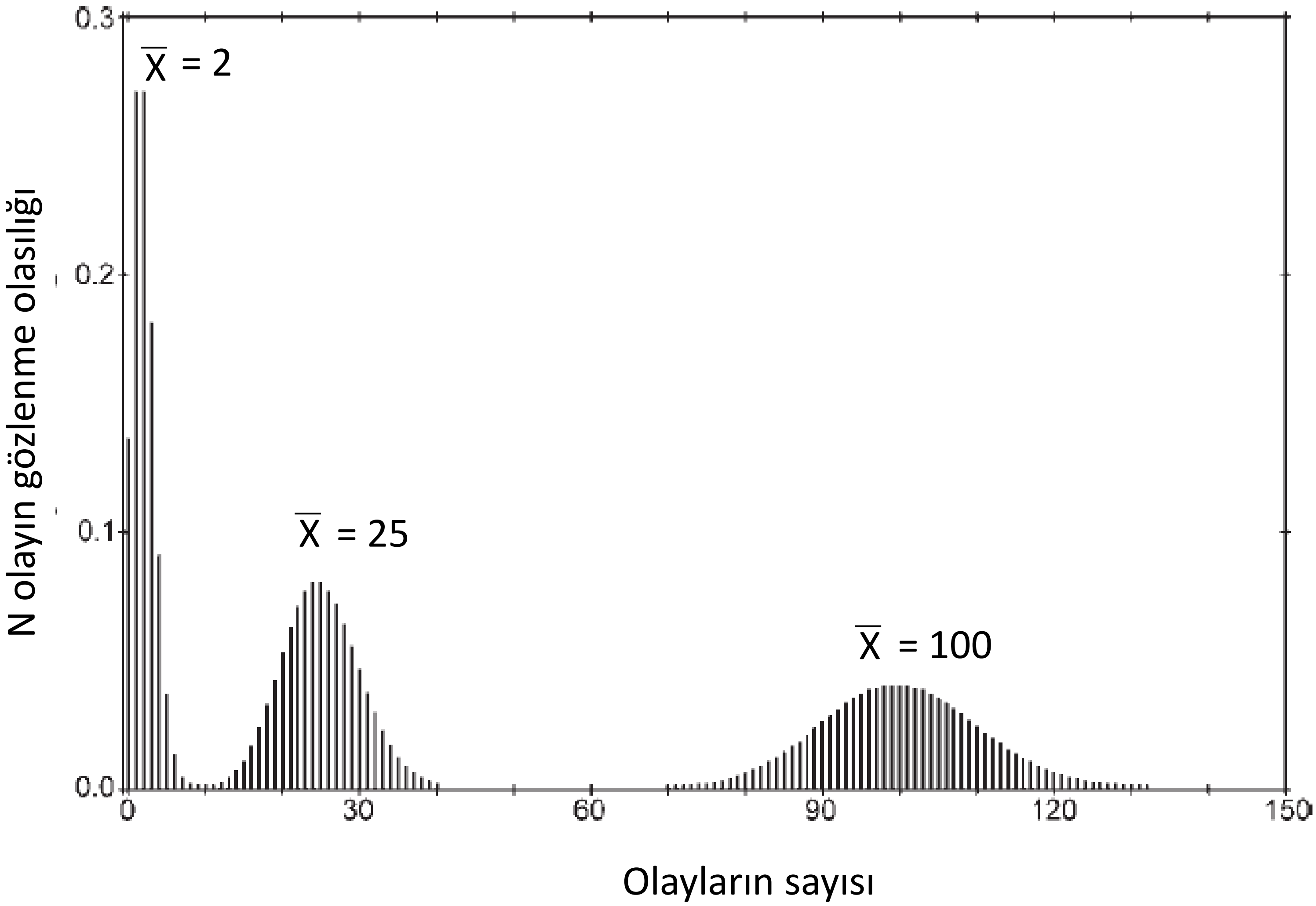
Bu sonuç Binom ile aynıdır ancak dağılımın tahmin edilen variyansı farklıdır.

$$\sigma^2 \equiv \sum_{x=0}^{n} (x - \bar{x})^2 P(x) = pn$$

Varyans : $\sigma^2 = \bar{x}$

Standart sapma : $\sigma = \sqrt{\bar{x}}$

ÜÇ FARKLI ORTALAMA DEĞER İÇİN POİSSON DAĞILIMI



ÖRNEK

SORU: Radyoaktif bir kaynaktan salınan fotonların verdiği ortalama sayım dakikada 20 se, ikinci ölçümde dakikada 18 sayım alma olasılığı nedir ?

$$P(18) = [20^{18} \times e^{-20}] / 18!$$

$$P(18) = 0.084 = \%84$$

Yapılacak 10 000 ölçümden 844 tanesi dakikada 18 sayım verecektir

GAUSS YA DA NORMAL DAĞILIM

Denemelerin sayısı (n) sonsuz ve olasılığın ortaya çıkmasının sonlu büyüklükte olduğunda (np >> 1) bu dağılım kullanılır.

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right]} \qquad P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{x}}} e^{-\left[\frac{(x-\bar{x})^2}{2\bar{x}}\right]}$$

Gauss dağılımının özellikleri:

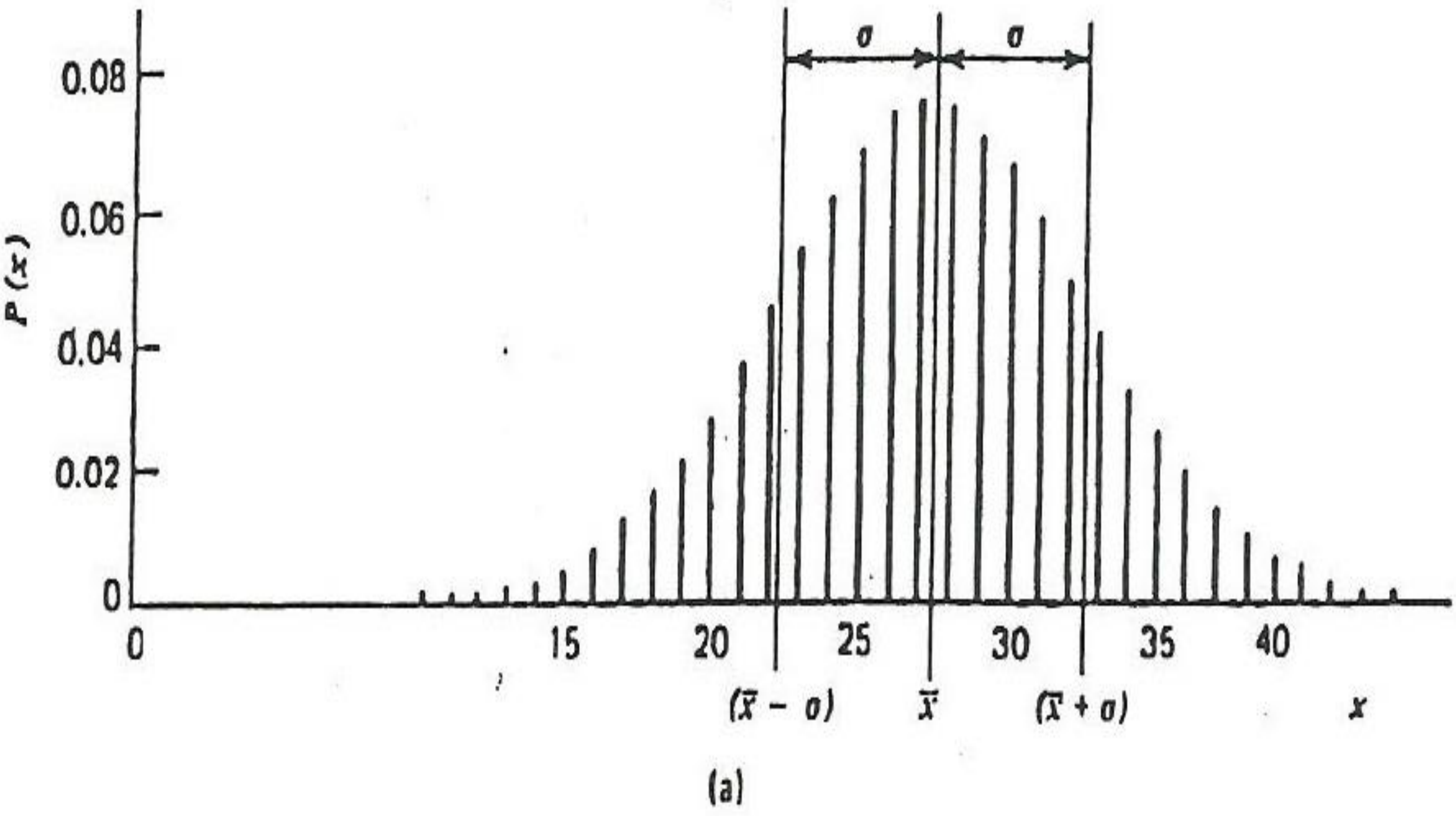
2

- Normalize edilir: $\sum_{x=0}^{\infty} P(x) = 1$

- Dağılım tek bir parametre ile ($\bar{x}$) karakterize edilebilir. Dağılım ortalama değer etrafında simetriktir ve süreklidir

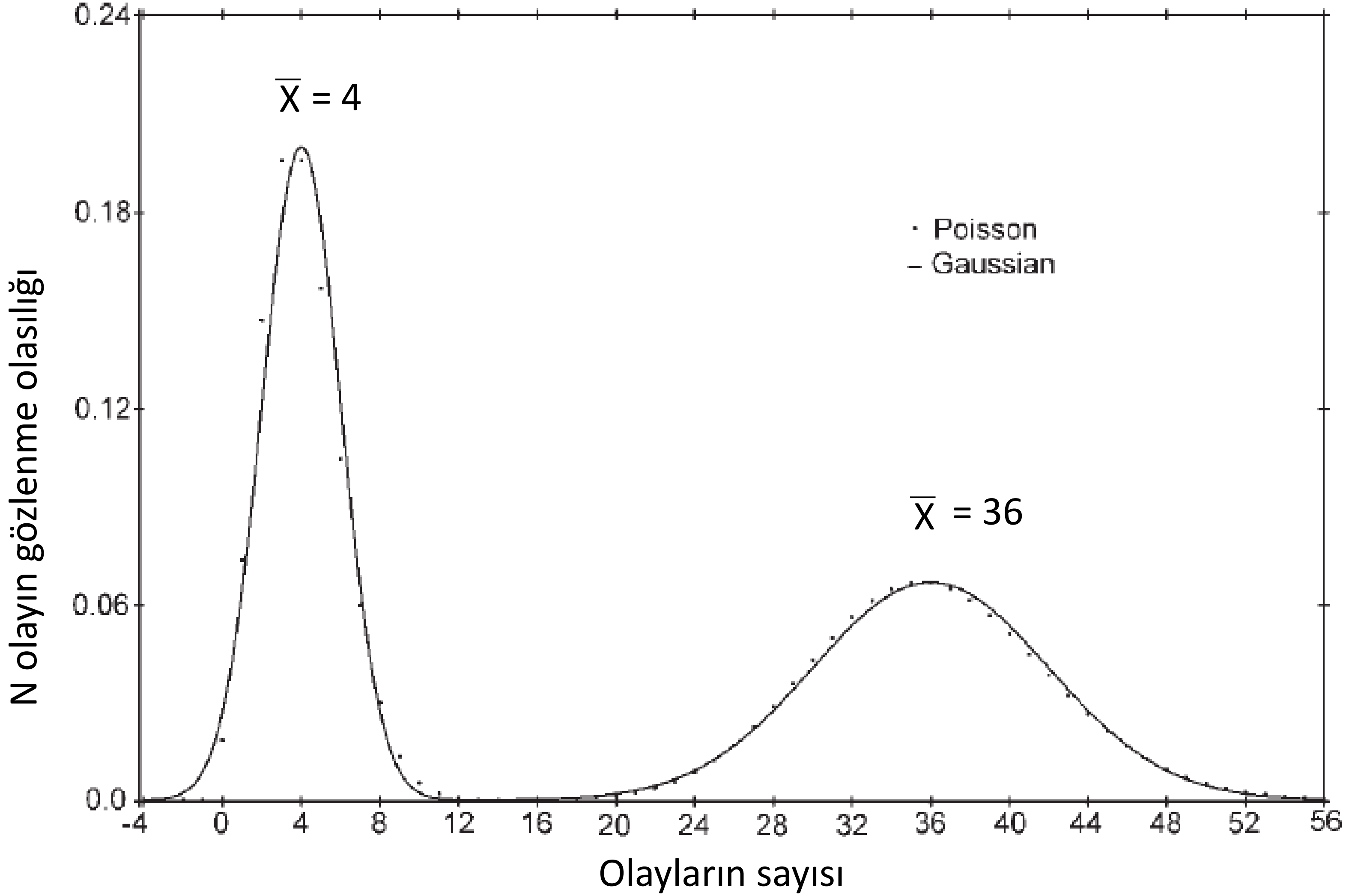
- Tahmin edilen variyans σ^2 yine ortalama değere eşittir.

GAUSS YA DA NORMAL DAĞILIM



X = 27.4 ortalama değeri için Gauss dağılımı

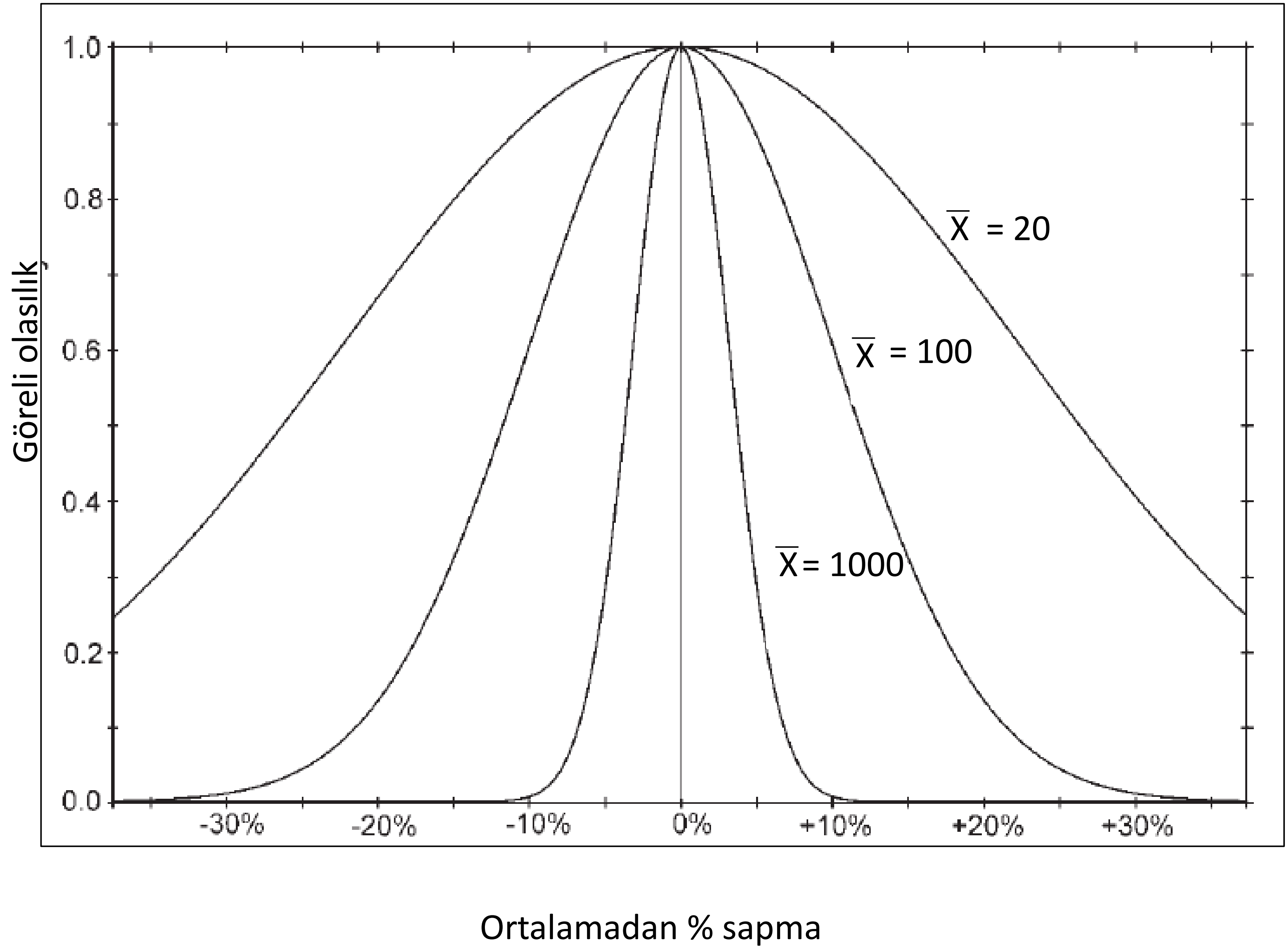
POİSSON VE GAUSS DAĞILIMLARI ARASINDAKİ FARK



Ortalama değerin tekrarlanma sayısı 20'den büyük ise dağılım Gauss'dur

YÜZDE BELİRSİZLİK

Farklı ortalama değerlerde Gauss Dağılımları



ÖLÇÜM SONUÇLARININ İSTATİSTİKSEL MODELE UYGUNLUĞU

N ÖLÇÜM DEĞERİNİN UYGUNLUĞU

Deneysel sonuçlar

İstatistiksel model

N ölçüm sonucu

Poisson veya Gauss seç

$\overline{X}_e$

$\overline{X}_e = X$

F(x)

Dağılımların şekilleri aynı mı?

P(x)

$s^2 = 7.36$

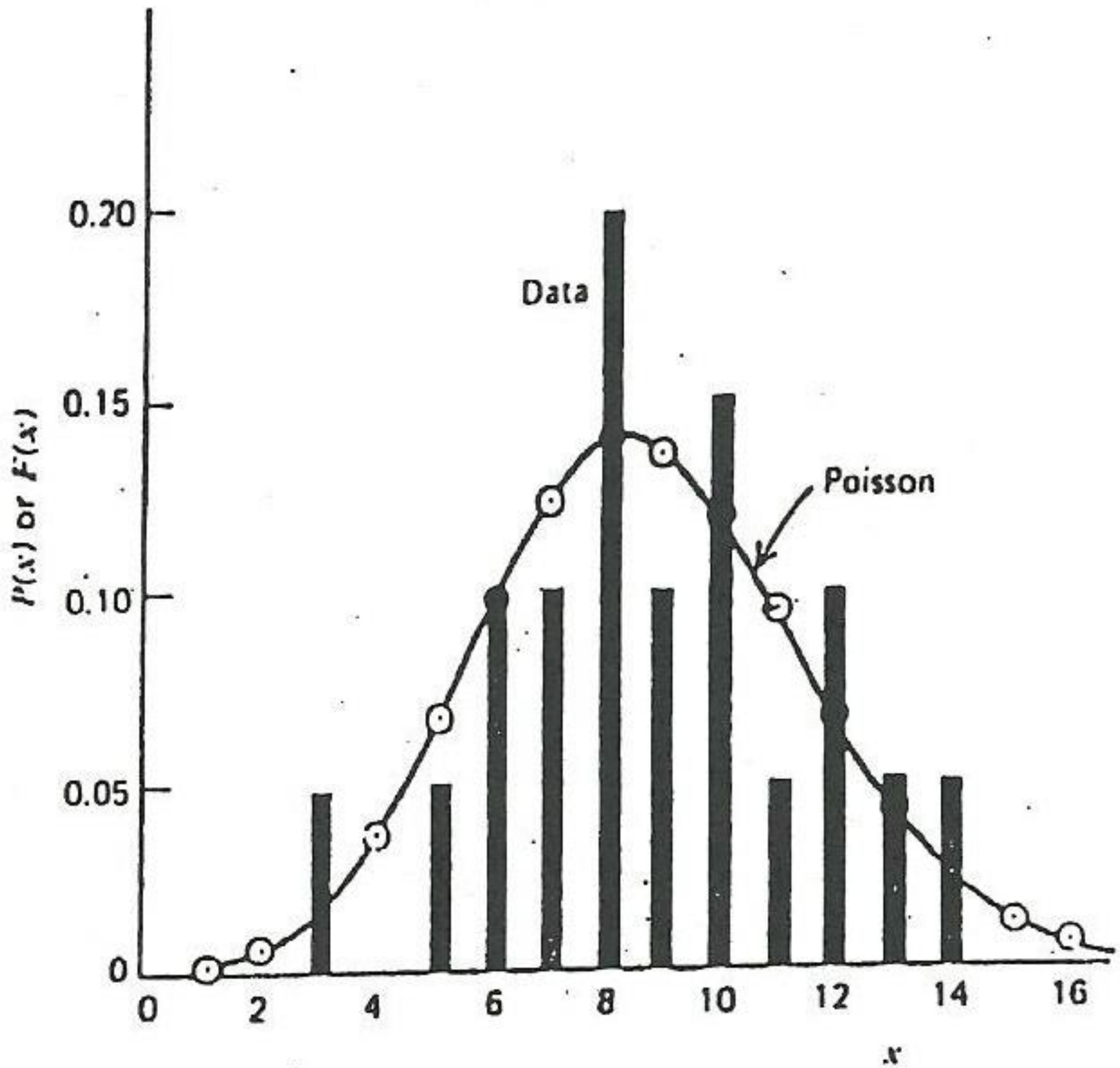
σ^2 ve S^2 değerleri uyumlu mu?

?????

$\sigma^2 = \overline{x} = 8.80$

χ^2 Kriterini uygula

Poisson ve Frekans dağılım fonksiyonları



Ölçüm sonuçlarının doğruluğu χ^2 kriteri

$$\chi^2 = \frac{1}{x_e} \sum_{i=1}^{N} (x_1 - x_e)^2$$

$$\chi^2 = \frac{(N-1)S^2}{x_e}$$

$$\chi^2 \approx \text{N -1}$$

Sayım sistemindeki doğal dalgalanmalar beklenilen istatistiksel dağım ile uyumlu mu?

10 000	10 000	10 000	10 000	10 0000	10 000
10 000	10 034	10 105	9998	10 225	9988
10 000	10 021	10 101	9989	10 001	9996

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (\bar{n} - n_i)^2}{\bar{n}} \tag{2.88}$$

where $n_i|_{i=1,\ldots,N}$ represents the results of N measurements with $\bar{n}$ being the average.

To apply the χ^2 test, one first calculates χ^2 using Eq. 2.88. Then, using Table 2.3, the corresponding probability is obtained. The meaning of the probability values listed in Table 2.3 is the following. If the set of measurements is repeated, the value of χ^2 gives the probability to obtain a new χ^2 that is larger or smaller than the first value. For example, assume that $N = 15$ and $\chi^2 = 4.66$. From the table, the probability is 0.99, meaning that the probability for a new set of measurements to give a $\chi^2 < 4.66$ is less than $1 - 0.99$, i.e., less than 1%. What this implies is that the data are clustered around the mean much closer than one would expect. Assume next that $N = 15$ and $\chi^2 = 29.14$. Again, from the table, the probability to get $\chi^2 > 29.14$ is only 1% or less. In this case, the data are scattered in a pattern around the mean that is wider than one might expect. Finally, consider $N = 15$ and $\chi^2 = 13.34$. The probability is then 0.5, which means that, from a new set of measurements, it is equally probable to get a value of χ^2 that is smaller or larger than 13.34. Notice that the probability is close to 0.5 when $\chi^2 \sim N - 1$. In practice, a range of acceptable χ^2 values is selected in advance; then a set of data is accepted if χ^2 falls within this preselected range. For more details about χ^2, see Johnson & Leone, Jaech, and Smith.

ÖLÇÜLEN DEĞERLERİN POISSON DAĞILIMINDAN BEKLENEN DEĞERLERE NEKADAR YAKIN OLDUĞU

Table 2.3 Probability Table for χ^2 Criterion†

Degrees of freedom‡	Probability						
($N-1$)	0.99	0.95	0.90	0.50	0.10	0.05	0.01
2	0.020	0.103	0.211	1.386	4.605	5.991	9.210
3	0.115	0.352	0.584	2.366	6.251	7.815	11.345
4	0.297	0.711	1.064	3.357	7.779	9.488	13.277
5	0.554	1.145	1.610	4.351	9.236	11.070	15.086
6	0.872	1.635	2.204	5.348	10.645	12.592	16.812
7	1.239	2.167	2.833	6.346	12.017	14.067	18.475
8	1.646	2.733	3.490	7.344	13.362	15.507	20.090
9	2.088	3.325	4.168	8.343	14.684	16.919	21.666
10	2.558	3.940	4.865	9.342	15.987	18.307	23.209
11	3.053	4.575	5.578	10.341	17.275	19.675	24.725
12	2.571	5.226	6.304	11.340	18.549	21.026	26.217
13	4.107	5.892	7.042	12.340	19.812	22.363	27.688
14	4.660	6.571	7.790	13.339	21.064	23.685	29.141
15	5.229	7.261	8.547	14.339	22.307	24.996	30.578
16	5.812	7.962	9.312	15.338	23.542	26.296	32.000
17	6.408	8.672	10.085	16.338	24.769	27.587	33.409
18	7.015	9.390	10.865	17.338	25.989	28.869	34.805
19	7.633	10.117	11.651	18.338	27.204	30.144	36.191
20	8.260	10.851	12.443	19.337	28.412	31.410	37.566
21	8.897	11.591	13.240	20.337	29.615	32.671	38.932
22	9.542	12.338	14.041	21.337	30.813	33.924	40.289
23	10.196	13.091	14.848	22.337	32.007	35.172	41.638
24	10.856	13.848	15.659	23.337	33.196	36.415	42.980
25	11.534	14.611	16.473	24.337	34.382	37.382	44.314
26	12.198	15.379	17.292	25.336	35.563	38.885	45.642
27	12.879	16.151	18.114	26.336	36.741	40.113	46.963
28	13.565	16.928	18.939	27.336	37.916	41.337	48.278
29	14.256	17.708	19.768	28.336	39.087	42.557	49.588

P SONUCUNUN DEĞERLENDİRİLMESİ

$P < 0.01$: Dalgalanmalar çok büyük

$0.01 < P < 0.02$: Deney hatası olabilir

$P > 0.99$: Tesadüfi dalgalanmalar beklenenden çok düşük (sistematik gürültü ölçümü!)

$0.98 < P < 0.99$: Deney hatası olabilir

$0.02 > P < 0.098$: Poisson dağılımına uygunluk gösterir

$\chi^2 = 4.66$
$N = 15$
$P = 0.99$

$\chi^2 = 13.34$
$N = 15$
$P = 0.5$

$\chi^2 = 29.14$
$N = 15$
$P = 0.01$

Dağılım, Poisson dağılımına uymaktadır

Örnek: χ^2 dağılımını kullanarak aşağıdaki 20 ölçümlük dizinin Poisson dağılımından elde edilme olasılığını bulunuz.

3875	3575
3949	4023
3621	3314
3790	3612
3902	3705
3851	3412
3798	3520
3833	3743
3864	3622
	3614

ÖLÇÜM SONUÇLARININ İSTATİSTİKSEL MODELE UYGUNLUĞU

TEK BİR ÖLÇÜM DEĞERİNİN UYGUNLUĞU

Deneysel sonuçlar | İstatistiksel model

Tek ölçüm sonucu : x

$\overline{X} = x$ Kabul et $\longrightarrow$ Poisson veya Gauss seç

$\overline{X} = x$

$\downarrow$

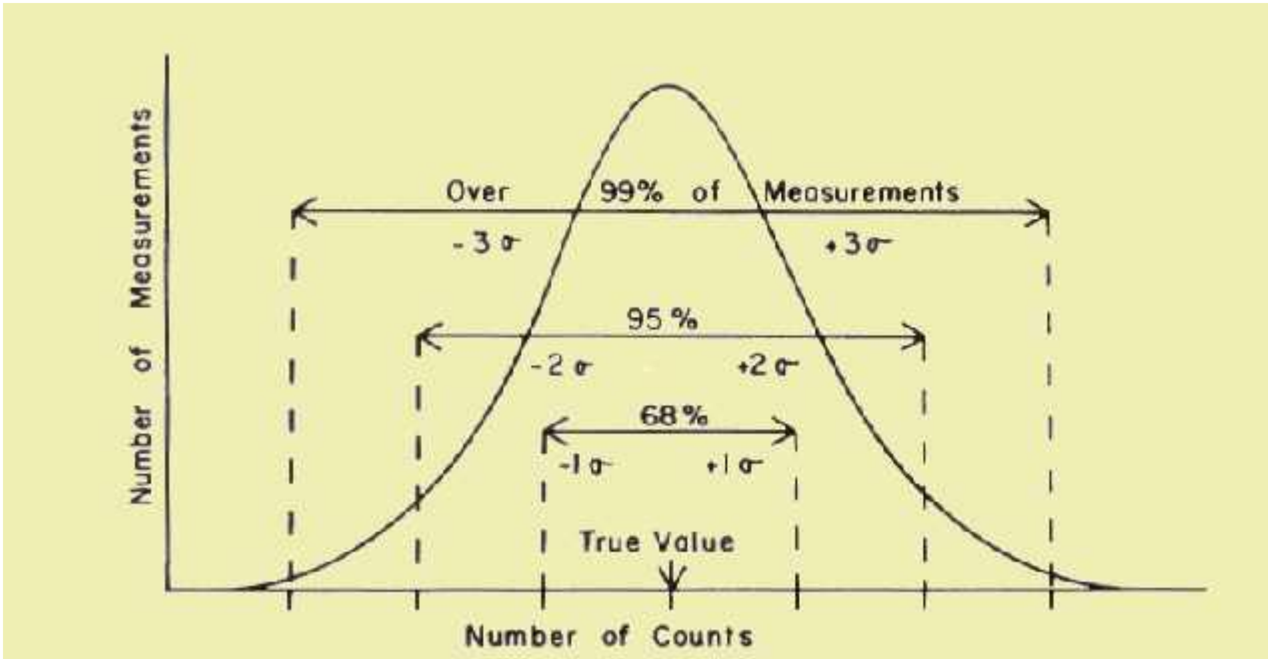
P(x)

$\downarrow$

σ^2

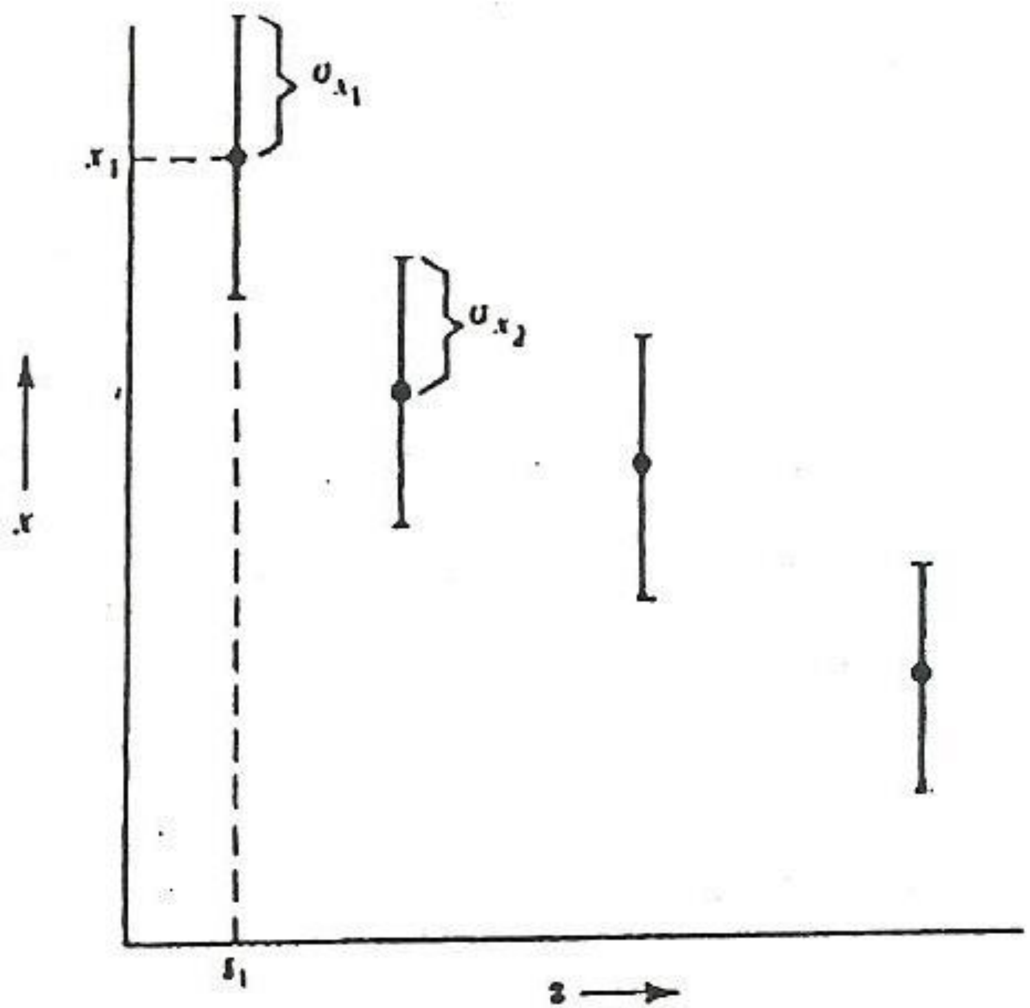
Beklenen örnek varyans $s^2 \approx$ X ölçümünün alındığını varsaydığımız istatistiksel dağılım σ^2

TEK BİR ÖLÇÜM DEĞERİNİN UYGUNLUĞU



Aralık		Doğru ortalamanın ($\bar{x}$) içerilme olasılığı
$x \pm 0.67\sigma$	93.3 – 106.7	%50
$x \pm \sigma$	90 – 110	%68
$x \pm 1.64\sigma$	83.6 – 116.64	%90
$x \pm 2\sigma$		%95
$x \pm 2.58\sigma$	74.2 – 125.8	%99

Deneysel ölçü noktalarına karşı gelen hata çubuklarının gösterilmesi



UYARI:

Tüm bu sonuçlar sadece denemeler içerisinde başarılmış olanlara uygulanır. Para atımında tura gelmesi, doğum günlerinin sayılması gibi.

Radyoaktif azalım ya da nükleer sayımda $\sigma = \sqrt{x}$ uygulaması sadece dedektör tarafından belirli bir süre boyunca kayıt edilen sayımlaradır. Aşağıdakilere uygulanamaz.

1. Sayım hızları
2. Sayımların toplam ya da farkları
3. Bağımsız sayımları ortalaması
4. Türetilen herhangi bir büyüklük

FRAKSİYONEL HATA

$$\frac{\sigma_x}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

X	σ	$1 / X^{1/2}$	% $1 / X^{1/2}$
100	10	0.1	10
1000	31.6	0.03	3
10 000	100	0.01	1
100 000	316	0.0031	0.3
1 000 000	1000	0.001	0.1

HATALARIN TÜREMESİ

Ölçüm sonuçları $x, y, z, \ldots$

Bu sonuçların standart sapmaları $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \ldots$

Bu sonuçlardan hesaplanan bir niceliğin standart sapması

$u(x, y, z, \ldots)$

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \cdots$$

Eğer u= x+y veya u= x – y ise

$$\frac{\partial u}{dx} = 1 \qquad \frac{\partial u}{dy} = \pm 1$$

$$\sigma_u^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

veya

$$\sigma(N_1 \pm N_2 \pm N_3 \pm \ldots) = \sqrt{N_1 + N_2 + N_3}$$

Eğer

$$x = 1071 \qquad \sigma_x = \sqrt{1071} \qquad \sigma_u = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{1071 + 521}$$

$$y = 521 \qquad \sigma_y = \sqrt{521} \qquad \Rightarrow \qquad = \sqrt{1592} = 39.9$$

$$u = 550$$

$$\text{Net} \quad \text{Sayım} = 550 \pm 39.9$$

Bir Sabit ile Çarpma veya Bölme

$u = Ax \qquad \sigma_u^2 = A^2\sigma_x^2$ NOT : $\sigma(AN) = A\sigma_n = A\sqrt{N}$

$\frac{\partial u}{dx} = A \qquad \sigma_u = A\sigma_x$

benzer olarak

$u = \frac{x}{B}$ ise $\sigma_u = \frac{\sigma_x}{B}$ tir.

Örnek olarak bir x sayımının bir t süresince elde edildiğini varsayalım;

$$\text{Sayım Hızı} = r = \frac{x}{t} \quad \text{tir.}$$

t nin çok küçük bir hata ile ölçüldüğü kabul edilebilir. Örneğin:

x = 1120 sayım ise ve t = 5 sn. ise

$$r = \frac{1120}{5} = 224 sn.^{-1}$$

$$\sigma_r = \frac{\sigma_x}{t} = \frac{\sqrt{1120}}{5} = 6.7 sn.^{-1}$$

r= 224 $\pm$ 6,7 sayım / sn.

Sayımların Çarpımı ya da Bölümü

u= xy $\quad \frac{\partial u}{\partial x} = y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x$

$$\sigma_u^2 = y^2\sigma_x^2 + x^2\sigma_y^2$$

Her iki tarafın da $u^2 = x^2y^2$ ile bölünmesi sonucu

$$\left(\frac{\sigma_u}{u}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$$

Benzer olarak;

$$u = \frac{x}{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{1}{y}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(-\frac{x}{y^2}\right)^2 \sigma_y^2$$

her iki tarafı da $u^2 = \dfrac{x^2}{y^2}$ ile bölersek;

$$\left(\frac{\sigma_u}{u}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$$

$$\left(\frac{\sigma_u}{u}\right) = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

Örnek: Tek bir radyoaktif kaynakla alınan toplam sayım ve background ölçümleri Ve bu ölçümlerin elde edilme süreleri aşağıdadır: Net sayım hızı ve belirsizliği bulun

N	T N	N B	T B
540	5	64	3
422	4	260	10
825	8	92	4

Buna göre,

$$R_1 = \frac{540}{5} - \frac{64}{3} \mp \sqrt{\frac{540}{5^2} + \frac{64}{3^2}} = 86.7 \mp 5.4$$

$$R_2 = \frac{422}{4} - \frac{260}{10} \mp \sqrt{\frac{422}{4^2} + \frac{260}{10^2}} = 79.5 \mp 5.2$$

$$R_3 = \frac{825}{8} - \frac{92}{4} \mp \sqrt{\frac{825}{8^2} + \frac{92}{4^2}} = 80.1 \mp 4.3$$

DENEY TEORİ İLİŞKİLERİ (FİT – UYARLAMA İŞLEMLERİ
LİNEER KORELASYON

$$f(x, \alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2.$$

$$\chi^2 = \sum [f(x_i, \alpha) - y_i]^2$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial \alpha} = 0 = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\sum \{f(x_i, \alpha) - y_i\}^2\right]$$

$$r = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{\left[N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right]\left[N\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2\right]}}$$

LİNEER KORELASYON