BELİRSİZ KATSAYILAR YÖNTEMİ

Bu bölümde sabit katsayılı lineer homogen olmayan

$$L(D)y = f(x)$$

denkleminin genel çözümü için gerekli olan bir özel çözümün hesabı üzerinde durulacaktır; burada

$$L(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$$

dir. Önce aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 1 (Süperpozisyon İlkesi)

y_{p_1},

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) \tag{1}$$

denkleminin (a,b) aralığında bir özel çözümü ve y_{p_2} aynı aralık üzerinde

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x) \tag{2}$$

denkleminin bir özel çözümü olsun.

Bu durumda,

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}\ ,$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x) \tag{3}$$

denkleminin (a,b) aralığında bir özel çözümüdür.

Bu teoreme gore verilen denklemin bir özel çözümünü bulmak için homogen deknlem daha basit parçalara ayrılmaktadır. Her bir parçanın bir özel çözümü bulunduktan sonra bu çözümler toplanarak birleştirilir ve böylece orjinal denklem için bir özel çözüm elde edilmiş olur.

Uyarı 1. Teorem 1 dosdoğru

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) \tag{4}$$

denklemine genişletilebilir. Buna gore

y_{p_i},

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_i(x)$$

denkleminin (a,b) üzerinde bir özel çözümü ise, o zaman

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_k}$$

(a,b) üzerinde (4) ün bir özel çözümüdür.

Uyarı 2. Teorem 1 in ispatına benzer bir yolla süperpozisyon kuralı

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F_1(x) + F_2(x) \tag{5}$$

denklemi için de formüle edilebilir:

y_{p_1}, (a,b) üzerinde

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F_1(x)$$

denkleminin bir özel çözümü ve y_{p_2} aynı aralık üzerinde

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F_2(x)$$

denkleminin bir özel çözümü ise ozaman $y_{p_1} + y_{p_2}$, (a,b) üzerinde (5) denkleminin bir özel çözümüdür.

Örnek 1. $y_{p_1} = \frac{x^4}{15}$, $(-\infty, \infty)$ üzerinde

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 2x^4$$

denkleminin bir özel çözümü ve

$y_{p_2} = \frac{x^2}{3}$ aynı aralık üzerinde

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 4x^2$$

denkleminin bir özel çözümüdür. Süperpozisyon ilkesi yardımıyla

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 2x^4 + 4x^2$$

denkleminin $(-\infty, \infty)$ de tanımlı olan bir özel çözümünü bulunuz.

A) $f(x) = ke^{\alpha x}$ olsun.

Kolaylık olsun diye 2. basamaktan sabit katsayılı

$$ay'' + by' + cy = ke^{\alpha x} \tag{9}$$

denklemini ele alalım. Burada α ve k sabitlerdir.

<u>Teorem 2.</u>

1) $e^{\alpha x}$,

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{10}$$

homogen denkleminin bir çözümü değilse, o zaman (9) un bir özel çözümü

$$y_p = Ae^{\alpha x}$$

dir; burada A belirlenmesi gereken bir sabittir.

2) $e^{\alpha x}$ (10) un bir çözümü ama $xe^{\alpha x}$ çözüm değilse, ozaman (9)un bir özel çözümü

$$y_p = Axe^{\alpha x}$$

dir, burada A belli bir sabittir.

3) $e^{\alpha x}$ ve $xe^{\alpha x}$, (10) un çözümleri ise, ozaman bir özel çözüm

$$y_p = Ax^2 e^{\alpha x}$$

dir, burada A belli bir sabittir.

Örnek 1. $y'' - 7y' + 12y = 4e^{2x}$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Denkleme ilişkin homogen denklemin temel çözümler cümlesi

$$\{e^{3x}, e^{4x}\}$$

dir. Buradan e^{2x} homogen diferensiyel denklemin bir çözümü değildir. Dolayısıyla verilen denklemin bir özel çözümü

$$y_p = Ae^{2x}$$

şeklindedir. Bu çözüm denklemde yerine yazılırsa A=2 bulunur. Buradan

$$y_p = 2e^{2x}$$

dir.

B) $f(x) = G(x)$; $G(x)$ bir polinom olsun.

$$ay'' + by' + cy = G(x),$$

$G(x)$, k-yıncı dereceden bir polinom olsun. Bu denklemin bir y_p özel çözümü için aşağıdaki Teorem verilebilir:

Teorem3.

1) $c \neq 0$ ise,

$$y_p = Q(x),$$

olup burada $Q(x)$ k-yıncı dereceden bir polinomdur.

2) $c = 0$ ve b≠0 ise,

$$y_p = xQ(x),$$

olup burada $Q(x)$ k-yıncı dereceden bir polinomdur.

3) $c = 0$ ve b=0 ise,

$$y_p = x^2 Q(x),$$

olup burada $Q(x)$ k-yıncı dereceden bir polinomdur.

C) $f(x) = e^{\alpha x}G(x)$ olsun. Şimdi 2. basamaktan sabit katsayılı

$$ay'' + by' + cy = e^{\alpha x}G(x) \qquad (17)$$

denklemini ele alalım, burada α bir sabit ve G bir polinomdur.

(17) nin genel çözümü

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p$$

dir, burada y_p, (1) in bir özel çözümü ve $\{y_1, y_2\}$

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (18)$$

homogen denkleminin bir Temel Çözümler Cümlesidir.

Bu kesimde y_p özel çözümünü bulmak için kullanılan prosedür Belirsiz Katsayılar Yöntemi adını almaktadır.

__**Teorem 4.**__

1) $e^{\alpha x}$, (18) homogen denkleminin bir çözümü değilse, o zaman (17) nin bir özel çözümü

$$y_p = e^{\alpha x}Q(x)$$

dir; burada $Q(x)$, $G(x)$ ile aynı dereceden bir polinomdur.

2) $e^{\alpha x}$ (18) homogeny denkleminin bir çözümü ama $xe^{\alpha x}$ değilse, ozaman (17) nin bir özel çözümü

$$y_p = xe^{\alpha x}Q(x)$$

dir, burada $Q(x)$, $G(x)$ ile aynı dereceden bir polinomdur.

3) $e^{\alpha x}$ ve $xe^{\alpha x}$, (18) in çözümleri ise, ozaman (17) nin bir özel çözümü

$$y_p = x^2e^{\alpha x}Q(x)$$

dir, burada Q, G ile aynı dereceden bir polinomdur.

__**Uyarı**__ Yukarıdaki üç durumun üçünde de Q nun katsayılarını belirlemek için uygun y_p ve türevleri (17) de yerlerine konur ve

$$ay_p'' + by_p' + cy_p \equiv e^{\alpha x}G(x)$$

elde edilir. Buradan Q(x) in katsayılarını bulmak için ortaya çıkan işlemler sıkıcı olabilir. Bunun yerine aşağıdaki yol izlenirse, daha az işlemle karşılaşılır;

$y = ue^{\alpha x}$ dönüşümü (17) ye uygulandığı zaman (1). durumda

$$au'' + p'(\alpha)u' + p(\alpha)u = G(x) \qquad (19)$$

denklemi bulunur. Bu yeni denklemin bir özel çözümü $u_p = Q(x)$ dir; burada Q, G ile aynı dereceden bir polinomdur ve $p(\lambda)$ karakteristik polinomdur.

(2). durumda

$$au'' + p'(\alpha)u = G(x) \tag{20}$$

denklemi bulunur. Bu durumda (20) nin bir özel çözümü $u_p = xQ(x)$ dir; burada Q, G ile aynı derecedendir. (3). durumda u lu diferensiyel denklem

$$au'' = G(x) \tag{21}$$

şeklinde bulunur. Bu durumda (21) in bir özel çözümü $u_p = x^2Q(x)$ şeklindedir ki bu $\frac{G(x)}{\alpha}$ ifadesi iki defa integere edilirken ortaya çıkan integrasyon sabitlerinin sıfır alınmasıyla bulunur.

Örnek. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(-1 + 2x + x^2)$ denkleminin bir özel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Homogen denkleme ilişkin bir Temel Çözümler Cümlesi,

$$\{e^x, e^{2x}\}$$

Buradan e^{3x} in homogeny denklem için bir çözüm olmadığı anlaşılıyor. O halde verilen denklem için bir özel çözüm

$$y_p = e^{3x}(Ax^2 + Bx + C)$$

şeklindedir. Burada A, B ve C belli sabitlerdir. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = -\frac{1}{2}, \qquad C = -\frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow \qquad y_p = e^{3x}(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}Bx - \frac{1}{4})$$

D) $f(x) = P(x)coswx + Q(x)sinwx$ olsun.

Şimdi sabit katsayılı

$$ay'' + by' + cy = P(x)coswx + Q(x)sinwx \tag{31}$$

denklemini göz önüne alalım; burada P ve Q polinomlardır.

<u>Teorem 5.</u> w pozitif bir sayı olmak üzereP ve Q polinomlar olsun. P ve Q nun en düşük derecesi k olsun. coswx ve sinwx

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{32}$$

homogen denkleminin çözümleri değilse, ozaman (31) denkleminin bir özel çözümü

$$y_p = A(x)coswx + B(x)sinwx \tag{33}$$

dir. Burada, A(x) ve B(x), k-yıncı dereceden polinomlardır.

Örnek. $y'' - 2y' + c = 5cos2x + 10sin2x$ denklemi için bir özel çözüm bulunuz.

$$y_p = Acos2x + Bsin2x$$

şeklinde çözüm aranırsa

$$(-3A - 4B)cos2x + (4A - 3B)sin2x \equiv 5cos2x + 10sin2x$$

$$\Longrightarrow A = 1, \qquad B = -2$$

olarak bulunurlar. Buradan,

$$y_p = cos2x - 2sin2x$$

dir.

E) $f(x) = e^{\lambda x}(P(x)coswx + Q(x)sinwx)$ olsun.

Son olarak sabit katsayılı

$$ay'' + by' + cy = e^{\lambda x}(P(x)coswx + Q(x)sinwx)$$

denklemini ele alalım, burada $\lambda \neq 0$ dır.

Böyle bir denklem için $y = e^{\lambda x}u$ dönüşümü yapılırsa, bulunacak u lu diferensiyel denklemin kuvvet terimi $P(x)coswx + Q(x)sinwx$ dir. Dolayısiyle u lu diferensiyel denklemin bir özel çözümü u_p ise, ozaman orjinal denklemin bir özel çözümü

$$y_p = e^{\lambda x}u_p$$

olacaktır.