Euler Denklemi

A) İkinci basamaktan bir Euler denklemi, a, b ve c sabitler olmak üzere

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0 \tag{1}$$

şeklinde verilir. $y = x^r$ olsun. $y' = rx^{r-1}$, $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ olmak üzere bu fonksiyonlar (1) de yerlerine yazılırsa

$$p(r) = ar(r-1) + br + c$$

indisel polinomu ve

$$p(r) = 0$$

indisel denklemi elde edilir. Bu indisel denklemin köklerinin yapısına göre çözüm aşağıdaki gibi yazılır:

(i) r_1 ve r_2 farklı ve reel sayılar ise, $y(x) = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$,

(ii) $r_1 = r_2 = r$ ise, $y(x) = (c_1 + c_2 \ln x)x^r$,

(iii) $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $(\beta > 0)$ ise, $y(x) = x^\alpha [c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)]$.

Örnek 1. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

a) $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$,

b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$,

c) $x^2y'' - xy' + 3y = 0$.

Çözüm

a) Verilen denkleme karşılık gelen indisel denklem $p(r) = r^2 - 3r - 4 = 0$ olup, kökleri $r_1 = 4$ ve $r_2 = -1$ dir. O halde çözüm

$$y(x) = c_1x^4 + c_2x^{-1}$$

şeklinde yazılır.

b) Bu denkleme karşılık gelen indisel denklem $p(r) = r^2 - 4r + 4 = 0$ olup, kökleri $r_1 = r_2 = 2$ dir. Böylece çözüm

$$y(x) = (c_1 + c_2 \ln x)x^2$$

olur.

c) $p(r) = r^2 - 2r + 3 = 0$ olup, $r_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{2}$ olur ve çözüm

$$y(x) = x\left[c_1 \cos\left(\sqrt{2}\ln x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{2}\ln x\right)\right].$$

B) n-yinci basamaktan bir Euler diferensiyel denklemi

$$a_nx^ny^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = f(x) \tag{2}$$

şeklindedir, burada a_i, $i = 1, 2, ..., n$ reel sayılardır. (2) denklemine $x = e^t$ dönüşümü uygulanırsa $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}$ veya türev operatörleri cinsinden $(xD) \to D_1$, $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$ veya $\left(x^2D^2\right) \to D_1(D_1 - 1)$ ve böyle devam edilerek $(x^nD^n) \to D_1(D_1 - 1)(D_1 - 2)...(D_1 - (n-1))$ yazılarak, denklem değişken katsayılı halden

sabit katsayılı hale indirgenir; burada $D : x$ e göre türev operatörü ve $D_1 : t$ ye göre türev operatörüdür.
Örnek 2. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x + x^2 \ln x$ denklemini çözünüz.
Çözüm. Denkleme $x = e^t$ dönüşümü uygulanırsa, t bağımsız değişken olmak üzere

$$\left(D_1^2 - 4D_1 + 4\right) y = e^t + te^{2t}$$

şeklinde ikinci basamaktan sabit katsayılı,lineer, homogen olmayan bir diferensiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$y\left(t\right) = \left(c_1 + c_2 t\right) e^{2t} + e^t + \frac{t^3}{6} e^{2t}$$

olup verilen Euler denkleminin çözümü

$$y\left(x\right) = \left(c_1 + c_2 \ln x\right) x^2 + x + \frac{\ln^3 x}{6} x^2$$

olur.
C) n-yinci basamaktan bir Euler diferensiyel denklemi

$$a_n\left(ax+b\right)^n y^{(n)} + a_{n-1}\left(ax+b\right)^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_2\left(ax+b\right)^2 y'' + a_1\left(ax+b\right) y' + a_0 y = f\left(x\right)$$

şeklinde verilebilir. Bu durumda $ax + b = e^t$ dönüşümü uygulanarak,

$$\begin{array}{rcl} \left(ax+b\right) D & \rightarrow & aD_1 \\ \left(ax+b\right)^2 D^2 & \rightarrow & a^2 D_1\left(D_1-1\right) \\ & \vdots & \\ \left(ax+b\right)^n D^n & \rightarrow & a^n D_1\left(D_1-1\right) ... \left(D_1-\left(n-1\right)\right) \end{array}$$

yazılır ve denklem sabit katsayılı hale getirilir.
Örnek 3. $\left(x+2\right)^2 y'' - y = 4$ denklemini çözünüz.
Çözüm. Denklem $\left(\left(x+2\right)^2 D^2 - 1\right) y = 4$ şeklinde yazılabilir. Bu denkleme $x + 2 = e^t$ dönüşümü uygulanırsa

$$\left(D_1^2 - D_1 - 1\right) y = 4$$

sabit katsayılı denklemi elde edilir, bu denklemin çözümü

$$y\left(t\right) = c_1 e^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)t} - 4$$

olup, verilen denklemin çözümü

$$y\left(x\right) = c_1\left(x+2\right)^{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} + c_2\left(x+2\right)^{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} - 4$$

olur.