3.4. Çözümlü Problemler

**3.4.1** Bağımsız aynı dağılımlı  ve  rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu



olmak üzere  ve  rasgele değişkenlerini tanımlayalım. ,  ve  değerlerini hesaplayınız.

*Çözüm*:  ve  rasgele değişkenlerinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları,

, 

ve  ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu da



dir (Casella ve Berger, 2002, sayfa 230). Marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarından beklenen değerler  ve  olarak hesaplanmıştır.  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu için  yardımcı dönüşümünü tanımlayalım. Ters dönüşümler  ve  olup Jacobien matrisi ve determinantı

 

şeklinde hesaplanmıştır.  ve  nin sınırları,  ve  olup ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



dir. Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun  nin değer kümesi üzerinden integrali



olduğundan  nun marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olup,  dır. Ayrıca,  ve  olduğundan,



elde edilir. Genel olarak  dir.

**3.4.2**  bağımsız aynı olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olsun.  için  lerin olasılık yoğunluk fonksiyonu



olarak verildiğinde  olmak üzere  olasılığını hasaplayınız.

*Çözüm*: Önce,  nin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulalım.  nin dağılım fonksiyonu,  olmak üzere,







olup, olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olarak elde edilmiştir. Buradan da  olasılığı da,





olarak bulunmuştur.

**3.4.3** Beklenen değeri , varyansı  olan bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin dizisi  olsun. Ayrıca,  rasgele değişkenlerinden bağımsız, negatif değerler almayan sonlu beklenen değer ve varyansa sahip kesikli bir rasgele değişken de  olsun.  ve  olacak şekilde  rasgele değişkenini tanımlayalım. ,  ve  değerlerini hesaplayınız.

*Çözüm*: Önce,  değerini hesaplayalım.  verildiğinde,



olduğundan  beklenen değeri



olarak bulunur. Benzer şekilde  verildiğinde,  ve  değerleri de

 ve 

olup,  beklenen değeri



şeklinde bulunmuştur. Son olarak varyansın tanımından,



elde edilir.

**3.4.4**  ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,  için



şeklinde verilmiş olsun.

a)  ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

b)  ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

*Çözüm*: a) Ters dönüşümler  ve  olup Jacobien matrisi ve determinantı,

 ve 

şeklinde hesaplanmıştır. Buradan  ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,





dir. Görüldüğü gibi,  ve  bağımsız rasgele değişkenlerdir.

b) Ters dönüşümler  ve  olup Jacobien matrisi ve determinantı

 ve 

dir. Buradan, ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

 





olarak bulunur. Ayrıca, olması için gerek ve yeter koşul  olmasıdır.

**3.4.5** Bağımsız  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olarak verilsin.  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

*Çözüm*: Ters dönüşümler,



ve



olup kısmi türevler,





şeklindedir. Buradan Jacobien matrisi ve determinantı ise



olup  ve  nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olarak elde edilmiştir. Ayrıca, her  için



olduğundan  ve  bağımsızdır. Bu dönüşümler (literatürde Box-Müller metodu olarak bilinir) normal dağılımdan veri üretmek için kullanılmaktadır. Monte-Carlo yöntemi tamamen bu dönüşüme dayanır.

**3.4.6**  bağımsız aynı dağılıma sahip rasgele değişkenleri



olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun.

, ,

 … 

olmak üzere,  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,  için



ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu da,



şeklindedir. Buna göre,

a)  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

b)  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

*Çözüm*: a)  in dağılım fonksiyonu,  için  olup  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu (Teorem 6.4.1),



şeklinde yazılır. Daha açık olarak,  ve  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu  için,



şeklindedir. Buradan,  nin olasılık yoğunluk fonksiyonu  için,





integralinin sonucundan,



şeklinde bulunmuştur.

b) Ters dönüşümler,

 

şeklinde olup Jacobien matrisi ve determinantı,



dir. Dolayısı ile,  rasgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



şeklindedir. Burada,



olup,  rasgele değişkenleri bağımsızdır.

**3.4.7**  ve  rasgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu,



olarak verilmiş olsun.

a)  ve  nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını bulunuz

b)  koşullu olasılığını hesaplayınız.

c)  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

*Çözüm*: a)  ve  rasgele değişkenlerinin marjinal dağılım fonksiyonları sırası ile,

 , 

olup marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları da,

 , 

dir.

b)  olasılığı  in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonundan,

 

şeklinde hesaplanmıştır.

c)  rasgele değişkeninin değer kümesi,  olup, dağılım fonksiyonu  için  ve  için  olduğu açıktır. Ayrıca,  için dağılım fonksiyonunun değeri de



olduğundan  nin dağılım fonksiyonu ve türevinden olasılık yoğunluk fonksiyonu

  , 

şeklindedir.

**3.4.8** Bağımsız  ve  sürekli rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonu , olasılık yoğunluk fonksiyonu  olsun.

a)  olasılığını hesaplayınız.

b)  ve  rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları sırası ile,

 

şeklinde verildiğinde  olasılığını hesaplayınız.

c)  ise  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

*Çözüm*: a) Bu olasılık doğrudan,





şeklinde bulunmuştur. Rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonları farklı ise,



olup  olasılığı her iki durumda da aynıdır.  sürekli rasgele değişken ise,  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,



olup  dır (Örnek 3.1.4).

b)  ise  aralığında,  olup,  için  olasılığı



dir. Şimdi,  olsun. Bu durumda  aralığında  olup,  için



dir.

c)  ise bağımsız  ve  değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,



şeklindedir. Buradan,  olup  nin dağılım fonksiyonu  için  ve  için  dir. Ayrıca,  olup iki durum ayrı ayrı incelenmelidir.  için  değeri (şekildeki taralı alan)



olur.



*Şekil 3.4.1 Problem (3.4.8) için fonksiyonun tanım bölgeleri*

 aralığında dağılım fonksiyonunun değeri için Şekil (3.4.1) de gösterilen  bölgelerinin alanlarının bulunması gerekir. Şekilden de görüldüğü gibi, dağılım fonksiyonu aşağıda belirtilen alanların toplamıdır. Yani,



dir. Şekildeki bölgelerin alanları (,  ve  bölgeleri)

 ,  ve  olarak hesaplanmıştır.

 olasılığından  nin değeri  için,

dir. İki sonuç birleştirildiğinde,  nin dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

 , 

şeklinde elde edilmiştir.

**3.4.9**  dağılım fonksiyonu  olan aynı dağılımlı bağımsız rasgele değişkenler olsun.



olmak üzere,



şeklinde verilen  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulunuz.

*Çözüm*:, değer kümesi  olan kesikli bir rasgele değişkendir.  ler sadece  ve  değerlerini alan bağımsız rasgele değişkenler olup,



ve



dir.  ve  denirse,  rasgele değişkenlerinin olasılık fonksiyonu,



şeklinde olup moment çıkaran fonksiyonu da  olmak üzere  dir. Buradan,  ler bağımsız ve  olduğundan,  rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu,



dir. Bu fonksiyon da olasılık fonksiyonu,



olan bir  rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonudur. O halde,  nin olasılık fonksiyonu ile,  in olasılık fonksiyonu aynıdır.

**3.4.10**  olasılık fonksiyonu,  ve  için,



olan bağımsız aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler olsun.  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulunuz.

*Çözüm*:  lerin moment çıkaran fonksiyonu  için



olup  ler bağımsız olduğundan,  nun moment çıkaran fonksiyonu da



şeklindedir.

Şimdi herhangi bir  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,



olarak verilsin. Bu olasılık fonksiyonu,



olarak yazıldığında, nin moment çıkaran fonksiyonu,



şeklinde olup,  rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu ile aynıdır. Buradan,  ile  nin olasılık fonksiyonları aynıdır. Yani,  rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,



dır (bu olasılık fonksiyonu beşinci bölümde bahsedilecek olan özel dağılımlardan biridir).