**7.9.3. Bayes Tahmin Edicileri**

Kitle parametreleri genellikle rasgele olmayan sabitlerdir. Bayes yönteminde, kitle parametreleri de rasgele değişken olarak göz önüne alınır. Bu parametreler, alabileceği değerlere ilişkin inancın gücünü yansıtan önsel dağılımlara uyan rasgele değişkenlerdir. Bayes yönteminde,  nın bir dağılımına (*önsel dağılım* ya da prior distribution) ihtiyaç duyulur. Önsel sezgilerin örneklemden çıkarılan bilgi ile karşılaştırılması yapılır.  nın önsel dağılımın yanında, örneklem bilgisini de yansıtan bir sonsal dağılım kullanılır.

 örneklemi verildiğinde önce önsel dağılım belirlenir. Daha sonra verilen örneklemden sonsal dağılım bulunur. Sonsal dağılımın beklenen değeri  parametresinin *Bayes tahmin edicisidir*. Bayes tahmin edicilerini bulmak için aşağıdaki yol izlenir.

Önce önsel dağılım belirlenir (bu  olsun).  verildiğinde, örneklemin olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu yazılır. Bu olasılık fonksiyonu  olsun.  ler ile  nın ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu da  eşitliğinden elde edilir.  ler verildiğinde  nın *koşullu dağılımı* (*posterior* veya *sonsal* *dağılım*, ) bulunarak,  nın Bayes tahmin edicisi bu sonsal dağılımın beklenen değeridir. Yani,  nın Bayes tahmin edicisi



dir.

**Örnek 7.9.3.1** a)  verildiğinde  Bernoulli dağılımından bir örneklem olsun.  de parametreleri  ve  olan Beta dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. ,  verildiğinde  ve  dir. Burada,  yeterli olduğundan, parametre hakkında örneklem içindeki tüm bilgi  tarafından özetlenir. Önsel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu  için



olup  ile  nın ortak olasılık fonksiyonu,



dir.  nin marjinal olasılık fonksiyonu  için



şeklinde olup sonsal (posterior) dağılım (sadeleştirmelerden sonra)  için



olarak bulunmuştur (Casella ve Berger, 2002, sayfa 324). Yani, sonsal dağılım da parametreleri  ve  olan Betadır. Buradan  nin Bayes tahmin edicisi (sonsal dağılımın beklenen değeri)

 

şeklinde elde edilmiştir. Burada,  önsel dağılımın beklenen değeridir. Önsel dağılım parametreleri  ve  olan Beta dağılımı seçildiğinde sonsal dağılım da farklı parametreler ile yine Beta dağılımı olarak bulundu. Önsel dağılım ile sonsal dağılım farklı olabilir. Ancak, örnekte de görüldüğü gibi, Bayes tahmin edicisi önsel dağılımın beklenen değeri ile örneklem ortalamasının lineer birleşimidir. Bu genellikle doğrudur.

Bayes yönteminde önsel dağılımın seçimi önemlidir. Bu seçim için bazı olasılık kuralları dikkate alınmalıdır. Örneğin bu örnekte, önsel dağılım olarak başka bir dağılım da ele alınabilirdi. Ancak, aranan Bayes tahmin edicisi Binom dağılımının başarı olasılığıdır. Dolayısı ile, öncel dağılım olarak tanım kümesi  aralığı olan bir dağılım seçilmelidir.

b)  beklenen değeri  olan üstel dağılıma sahip bir rasgele değişken (önsel dağılım üstel) ve  verildiğinde  de beklenen değeri  olan Poisson dağılımından bir örneklem olsun.  nın Bayes tahmin edicisini bulalım. Koşullu dağılım Poisson olduğundan ortak olasılık fonksiyonu,



şeklinde olup faktörizasyon teoreminden ,  için yeterlidir. Ayrıca,  verildiğinde,  nin koşullu dağılımı beklenen değeri  olan Poissondur. Buradan  ve  nın ortak olasılık fonksiyonu,



olup  nin marjinal olasılık fonksiyonu da  için



şeklindedir. Sonsal dağılım da koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunun tanımından  için



olarak bulunmuştur. Dolayısı ile,  verildiğinde  nın beklenen değeri



dir. Koşullu beklenen değerde,  yerine  yazıldığında,  nın Bayes tahmin edicisi



şeklinde düzenlenebilir. Yine, Bayes tahmin edicisi önsel dağılımın beklenen değeri ile örneklem ortalamasının lineer birleşimidir.

c)  verildiğinde  beklenen değeri , varyansı  olan normal dağılımdan bir örneklem olsun.  da beklenen değeri , varyansı  olan normal dağılıma sahip bir rasgele değişken olsun (önsel dağılım da normal). Buna göre,  nın Bayes tahmin edicisini bulalım (,  ve  biliniyor). Faktörizasyon teoreminden,  örneklem ortalaması  için yeterlidir.  verildiğinde  nin koşullu dağılımı da normaldir (). Buradan,  ve  nın ortak olasılık yoğunluk fonksiyon, için,





şeklinde yazılabilir. Burada,

 ve 

dir.  nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu da,

 

olmak üzere,





olarak elde edilmiştir. Bu ifade biraz daha düzenlendiğinde,  nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu  için



şeklinde yazılabilir. Yani,  nin marjinal dağılımı,  dir. Ayrıca  olarak verildiğinde  nın koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu (sonsal dağılım)  için,





olarak bulunmuştur. Yani, sonsal dağılım da normaldir (). Dolayısı ile  nın Bayes tahmin edicisi (sonsal dağılımın beklenen değeri),



şeklinde bulunmuştur

Bayes tahmin edicileri genel olarak yanlıdır. Önsel dağılımın seçimine göre değişir. Yansızlık tahmin edicilerde aranan önemli özelliklerden biri olmasına rağmen, bazen yanlı tahmin ediciler tercih edilebilir. Örneğin, en çok olabilirlik tahmin edicileri bazen yanlı (asimptotik yansız) olup daha küçük varyanslı olduğundan tercih edilebilir.

**7.9.4. En Küçük Kareler Yöntemi**

Uygulamada çok kullanılan yöntemlerden biridir. Bu yöntem, iki değişken arasındaki ilişkiyi tahmin etmek için kullanılmakta olup regresyon yöntemi olarak da bilinir. Bu konu, ileride ayrı bir bölüm olarak tekrar incelenecektir. Bu kısımda, basit doğrusal regresyon denklemi üzerinde kısaca durulduktan sonra, regresyon denklemindeki parametrelerin nasıl tahmin edileceği çok kısa özetlenecektir.

Herhangi iki değişken  ve  olsun. Bu değişkenler arasında  şeklinde bir ilişki varsa,  için  nin değeri bellidir. Herhangi bir deney aynı koşullarda tekrarlandığında,  sabit tutulduğunda  için farklı sonuçlar gözlenebilir. Dolayısı ile,  şeklinde bir ilişki daha anlamlıdır. Burada,  şeklinde bir fonksiyon olarak ele alınacaktır.

 ler bilinen (rasgele olmayan) değişkenler,  ler bağımsız rasgele değişkenler,  (hata terimleri) ler beklenen değeri sıfır varyansı  olan bağımsız rasgele değişkenler,  ve  de parametreler olmak üzere basit doğrusal regresyon denklemi,



şeklinde verilir. Burada amaçlardan biri  ve  model parametrelerini hata kareler toplamı en küçük olacak şekilde tahmin etmektir. Yani,



minimum olacak şekilde  ve  değerlerini  ve  lere bağlı olarak bulmaktır. Bunun için,  in  ve  e göre birinci türevlerinin sıfıra eşitlenmesi ile  fonksiyonunu minimum ya da maksimum yapan değerler bulunur. Bu türevlerin sıfıra eşitlenmesi ile



denklemleri elde edilir. Buradan,  ve  parametrelerin tahmin edicilerini göstermek üzere,

 ve 

denklemleri elde edilir. Bu eşitlikler literatürde *normal denklemler olarak bilinir*. Normal denklemlerin çözümleri ise,



şeklindedir. Bu çözümler,  ve  parametrelerinin en küçük kareler tahmin edicileridir. Bunların minimum olduğunu göstermek için ikinci türevlerine de bakılması gerekir.