**1.4. Otokovaryans Fonksiyonu ve Özellikleri**

 durağan zaman serisinin otokovaryans fonksiyonu  şeklinde tanımlanmıştı. Korelasyon tanımından zaman serisinin otokorelasyon fonksiyonu da,



dir. Zaman serisi durağan ise  dir.  zaman serisine ait  nin gözlem değerlerine göre otokovaryans fonksiyonunun değerleri hesaplanabilir.  örneklem ortalamasını göstermek üzere, her bir  için örneklem otokovaryans fonksiyonu



formülü ile hesaplanır ( nin tahmin edicisi). Örneklem otokovaryans fonksiyonu bazen de,



formülü ile hesaplanır. Bazı istatistiki paket programlar (SAS gibi), otokorelasyonları ikinci formüle göre hesaplar.

10 birimlik gözlem değerleri aşağıdaki gibi verilmiş olsun. Verilen serinin otokovaryans ve otokorelasyonları hesaplayalım. Örneklem ortalaması ve örneklem varyansının değerleri sırası ile,

 ve 

dir.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|  | **10** | **12** | **8** | **14** | **12** | **17** | **13** | **16** | **20** | **18** |
|  | 12 | 8 | 14 | 12 | 17 | 13 | 16 | 20 | 18 |  |
|  | 8 | 14 | 12 | 17 | 13 | 16 | 20 | 18 |  |  |
|  | 14 | 12 | 17 | 13 | 16 | 20 | 18 |  |  |  |

Otokovaryans ve otokorelasyonlardan ilk iki tanesi







şeklinde hesaplanmıştır.

**Teorem 1.3.1**  durağan bir zaman serisi olsun.  otokovaryans fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

i)  simetriktir (=)

ii) 

iii)  fonksiyonu negatif olmayan tanımlıdır. Yani,

 için 

dır.

**İspat.** i) **** denirse,



elde edilir.

ii)  şeklinde aranan sonuç Cauchy-Schwarzd eşitsizliğinden açıktır.

iii)  alalım. Aksi halde,  dönüşümü ile sıfır beklenen değerli zaman serisi kullanılır. Buradan,



dır

Teorem otokorelasyon fonksiyonu için de geçerlidir. Yani,  durağan zaman serisinin otokorelasyon fonksiyonu  olsun. Buna göre,

i)  simetriktir (yani, =).

ii) Bütün  için  dir.

iii)  fonksiyonu negatif olmayan tanımlıdır.

**Örnek 1.4.1** Beklenen değeri  varyansı  olan bağımsız rasgele değişkenlerin bir dizisi ,  indis kümesi de doğal sayılar kümesi olsun.  zaman serisi de  için  olarak verilsin. Bu zaman serisinin otokovaryans ve otokorelasyon fonksiyonları için zaman serisini ( için model durağan olup her zaman yazılabilir),



şeklinde yazalım. Buradan, serinin beklenen değeri ve varyansı ( olduğundan beklenen değer ile sonsuz toplam yer değiştirebilir) sırası ile,





dir.  bağımsız rasgele değişkenlerin bir dizisi olduğundan,  için  dir. Ayrıca,  için  yazılır. O halde, otokovaryans fonksiyonu,



olarak bulunur. Otokorelasyon fonksiyonu  olup fonksiyonunun grafiği  için aşağıdadır. Grafikten görüldüğü gibi, otokorelasyonlar üstel olarak azalır. Otokorelasyonlar bazı serilerde üstel olarak azalmasına rağmen, bazen belli bir yerden sonra sıfır olur. Bazen de dalgalanmalar gösterir.

|  |  |
| --- | --- |
| UNTITLED-6 | Bunlar serinin türü hakkında bir bilgi verir. Otokorelasyonların azalma hızı da önemlidir. Bazı serilerde bu azalma hızlı olmasına rağmen bazen çok yavaştır. Bu özellik serinin durağanlığı hakkında ön bilgi verir. |

Genel olarak, durağan zaman serilerinde otokorelasyonlar mutlak değerce hızlı bir şekilde azalır. Azalma hızı yavaş ise, serinin durağanlığından şüphelenilir.

**1.5. Vektör Zaman Serileri**

Vektör zaman serilerindeki bir çok özellik, tek değişkenli zaman serilerindeki özelliklere benzer. Çok değişkenli (boyutlu) bir zaman serisi,  örneklem uzayını ve  de indis kümesini göstermek üzere,



şeklinde tanımlanır. Çok değişkenli bir zaman serisi de aynı  çarpım uzayı üzerinde tanımlıdır.  vektör zaman serisinin beklenen değeri,



ve

olmak üzere otokovaryans matrisi



şeklindedir.

**Tanım 1.5.1**  çok değişkenli zaman serisi eğer

i) 

ii) ,  nin bir fonksiyonudur

koşullarını sağlıyorsa,  zaman serisine durağandır denir

Bu tanıma göre,  durağan ve  da uygun boyutlu sabit bir matris ise  de durağandır. Bunu görmek için beklenen değer vektörü ile otokovaryans matrisini bulmak yeterlidir. Önce,



olup zamandan bağımsızdır. Ayrıca,



dir. O halde,  zaman serisi de durağandır. Buna göre, bir vektör zaman serisi durağan ise her bileşeni de durağandır.  vektör zaman serisi durağan olsun. Buradan, .nci bileşeni 1, diğerleri  olan  vektörü  şeklide seçildiğinde  olduğundan durağan  vektör zaman serisinin nci bileşeni de durağandır. Ancak iddianın tersi doğru değildir. Yani, bileşenleri durağan olan vektör zaman serisi durağan olmayabilir.

**Örnek 1.5.1** Birbirinden bağımsız sonlu ikinci momente sahip rasgele değişken dizileri  ve  olsun. İki seri de bağımsız rasgele değişkenlerin dizileridir. İki değişkenli zaman serisinin bileşenleri

ve 

olarak verilsin.  nin durağan olduğu açıktır. Ayrıca,  ve



olup  serisinin beklenen değeri ve varyansı zamana bağlı değildir. Diğer taraftan,



olduğundan kovaryanslar da zamana bağlı değildir. O halde,  de durağandır. İki değişkenli zaman serisinin bileşenleri durağandır. Ancak,  olduğundan kovaryanslar zamana bağlıdır. Yani, bileşenleri  ve  olan iki boyutlu vektör zaman serisi durağan değildir. Bununla beraber,  serisi de durağan değildir. Bazı durumlarda, serinin bileşenleri (ve serinin kendisi de) durağan olmamasına rağmen durağan bir lineer birleşim bulunabilir. Bu tür seriler ileride incelenecektir

 beklenen değeri  otokovaryans fonksiyonu  olan durağan bir zaman serisi,  de beklenen değeri  otokovaryans fonksiyonu  olan başka bir durağan zaman serisi olsun. Bu iki seri bağımsız ise, iki boyutlu  zaman serisi, beklenen değeri  ve otokovaryans matrisi,



olan durağan bir seridir. Ayrıca,  de durağandır. Bu lineer birleşim serisinin beklenen değer ve otokovaryans fonksiyonu sırası ile ,  şeklindedir.

Çok değişkenli zaman serilerinde durağanlığın tek değişkenli zaman serilerindeki tanıma benzediğini biliyoruz. Tek değişkenli zaman serilerinde otokovaryans fonksiyonu simetriktir. Burada simetriklik,  şeklindedir. Bunu aşağıdaki örnek üzerinde görmeye çalışalım.

**Örnek 1.5.2** Beklenen değeri , varyansı  olan bağımsız rasgele değişkenlerin dizisi  olsun. Bileşenleri  ve  olan iki değişkenli bir zaman serisinin bileşenleri



olarak verilsin.  olduğu açıktır.  için  olup  matrislerini hesaplayalım. Bunlar sırası ile









şeklinde hesaplanmıştır. Görüldüğü gibi,  dir

**Örnek 1.5.3** Beklenen değer vektörü , varyans kovaryans matrisi  olan bağımsız rasgele vektörlerin dizisi  olsun. Bileşenleri  ve  olan iki değişkenli zaman serisi  olarak verilsin. Bu serinin durağan olabilmesi için  matrisinin bütün özdeğerlerinin mutlak değerce  den küçük olması gerekir (bunu ileride göreceğiz).  katsayılar matrisi,



olarak seçildiğinde özdeğerleri  karekteristik denkleminin çözümleridir. Karekteristik denklem,  olup kökleri  ve  dir. Her iki özdeğer de mutlak değerce  den küçük olduğundan seri durağandır. Bu serinin otokovaryans matrisini bulalım. Herhangi bir  matrisi için  olacak şekilde  ve  matrisleri bulunabilir. Buradaki , özvektörlerden oluşturulan singüler olmayan (determinantı sıfırdan farklı) bir matris,  de özdeğerlerden oluşan genellikle diagonal (köşegensel) bir matristir. Özdeğerler tekrar ediyorsa  matrisi diagonal olmayabilir. O halde,  katsayılar matrisi  şeklinde yazılır. Bu gösterim de tek değildir.  matrisi değiştikçe gösterim de değişir. Bu matrisler,



olarak elde edilmiştir.  dönüşümü ile model  şekline dönüşür. Burada, = dir.  matrisi diagonal olmasından  nin bileşenleri

 , 

olarak yazılabilir. Ayrıca,

 için 

dir.  modeli,  şeklinde de yazılabilir. Burada,  matrislerinin hesaplanması kolay değildir. Diğer taraftan  modeli  şeklinde yazıldığında  kolayca hesaplanır.  diagonal olduğundan  matrisi



şeklindedir.  olup,  ve  matrislerini hesaplayalım. Önce  matrisi için



yazılır. Diğer taraftan,

 ve 

alındığında,



bulunur. Buradan,  matrisi



olarak bulunur. matrisi de  matrisi yardımı ile hesaplanabilir.  olup,  ve  olduğundan,  matrisi



olarak hesaplanmış olur

Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi otokovaryans matrisi  katsayılar matrisinin seçimine bağlıdır.  matrisi



olarak verilmiş olsaydı matrisin özdeğerleri ( ve )



olurdu. Öz değerlerden bir tanesi 1 olduğundan seri durağan değildir.

Yukarıdaki özellik durağan olmayan zaman serileri için de geçerlidir. Herhangi bir ***A*** matrisi için  olacak şekilde  ve  matrisleri bulunabilir. Bu matrisler,



olup,  dir.  nın özdeğerlerinden biri 1 olduğundan ( nin birinci köşegen elemanı )  matrisi hesaplanamaz.  dönüşümü ile  nin bileşenleri ,  şeklinde olup  durağan,  serisi ise durağan değildir.  dönüşümünden  serisinin bileşenleri,

 ve 

şeklinde yazılabilir.  nin her iki bileşeni de  yi içerdiğinden  nin iki bileşeni de durağan değildir. Diğer taraftan,  serisi



şeklinde olup durağandır. Burada  serisi  olmak üzere  şeklinde yazılabilir. Dolayısı ile,  nin kendisi durağan olmamasına rağmen, durağan olacak şekilde bir lineer birleşim vardır. Bu tür serilere *kointegre* (*eşbütünleşik*) seriler denir. Bu konular ileride ayrıntılı ele alınacaktır. Bu kısmı bitirmeden önce, daha önce bir benzerini incelemeye çalıştığımız aşağıdaki örneğe göz atalım.

**Örnek 1.5.4** Beklenen değeri  varyansı  olan bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin dizisi  ve iki değişkenli zaman serisinin bileşenleri de  olarak verilsin.

**a)**  iki değişkenli zaman serisinin otokovaryans matrisini bulalım. Önce  olup  için  dir.  ve  matrislerinin hesaplanması yeterlidir (). Önce,  matrisi,





olarak hesaplanmıştır. Benzer şekilde,  den  matrisi

, 

olarak hesaplanır.

**b)** Bileşenleri  ve  olan iki değişkenli zaman serisinin otokovaryans matrisi  olsun. Ayrıca,  ve  bu bileşenlerin varyansları olsun. Bu durumda,  olmak üzere,  matrisini hesaplayalım.

Önce,  ve  dir. Buna göre,  , ve  matrisleri sırası ile;









şeklindedir