**3.4. Asimptotik Dağılımlar**

Merkezi limit teoremi, örneklemin bağımsız aynı dağılıma sahip bir kitleden alınması varsayımına dayanır. Teoreme yeni koşullar eklenerek aynı dağılım varsayımı ihmal edilebilir. Bağımsızlık varsayımı ise kritik öneme sahiptir. Zaman serileri genellikle bağımlı değişkenler olup klasik merkezi limit teoreminin koşulları sağlanmaz. Bazı özel durumlarda (durağanlık gibi) merkezi limit teoremi kullanılarak istatistiki sonuç çıkarımlar yapılır.

Pratikte çok kullanılan merkezi limit teoremlerinden ikisi ispatsız olarak aşağıda verilmiştir (ispat ve ayrıntılar için Serfling (1980)’e bakılabilir).

**i) Klasik Merkezi Limit Teoremi:**  beklenen değeri  varyansı  olan bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenler olsun. Bu durumda,  olmak üzere  iken

 veya 

dir

**ii) Liapounov Merkezi Limit Teoremi:**  bağımsız rasgele değişkenler  ve  olsun (aynı dağılımlı değil).

 ve  olup  için

**(L)** 

koşulu sağlanıyorsa  iken



dir

**Örnek 3.4.1**  rasgele değişkenleri bağımsız  ve  (sabit varyanslı) olsun. Sonlu  ve  sayıları için,  ise  olup  ve Hölder eşitsizliğinden  yazılır. Buradan,



elde edilerek (L) koşulunun sağlandığı görülür

**Slutsky Teoremi** (Casella ve Berger, 2002, s. 239)  ve  rasgele değişken dizileri  iken sabit bir  reel sayısı için  ve  olsun. Bu durumda,

**a)**  **b)** 

dir

**Örnek 3.4.2** Zaman serisi modelleri, varsayımlar sağlanmasa da regresyon modeline benzer. , beklenen değeri  varyansı  olan bağımsız rasgele değişkenler olmak üzere kesim noktası (intercept) olmayan regresyon denklemini



şeklinde yazalım.  parametresinin en küçük kareler tahmin edicisi,



olup bu tahmin edici,  yerine  yazılarak düzenlendiğinde



olarak yazılır. Daha açık olarak,  ve  denirse,  nın EKK tahmin edicisi  şeklindedir. Regresyonda,  açıklayıcı değişkenin biliniyor (rasgele değil) olması gerekir. Bir çok zaman serisi modeli de regresyon modeline benzediğinden,  değişkeni regresyon varsayımını sağlamaz. Aşağıda  nin regresyon varsayımını sağlanmadığı durumlara göre  nin asimptotik dağılımı bulunmaya çalışılmıştır. İncelenecek durumlar şunlardır:

**a)**  ler beklenen değeri  varyansı  olan bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenler ve  için  ile  bağımsız olsun.

**b)** bütün  ler için  olsun (trend modeli).

**c)**  olsun. Bağımsızlık varsayımı bozulmakta ve regresyon modeli zaman serisi modeline dönüşmektedir Yani, model AR(1) dir.

Aşağıda, her üç durum için  nın EKK tahmin edicisinin asimptotik dağılımı incelenecektir.

**a)**  ile  ler bağımsız olduğundan  rasgele değişkenleri bağımsız ve  dir. Ayrıca,  için

 ve 

olsun.  lerin (bağımsız olduğundan) varyansı da



dır.  için  olup, Liapounov koşulu sağlanır ve  iken



dağılımda yakınsama elde edilir. Buradan,  olmak üzere,  rasgele değişkenleri için MLT geçerlidir ve  iken

 veya 

dir.

Ayrıca,  ler bağımsız olduğundan,  rasgele değişkenleri de bağımsız olup  dir. Buradan  iken



elde edilir. Zayıf büyük sayılar yasasına göre  iken



olup Liapounov merkezi limit teoremi ve Slutsky teoreminden  iken



şeklinde  nın asimptotik dağılımı elde edilir.

**b)**  olsun. Bu durumda,  nın EKK tahmin edicisini



şeklinde yazalım.  nin beklenen değeri ve varyansı ,  dir.  ise  ve



dir.



olup  iken,



dir. Yani,  için  olup Liapounov merkezi limit teoremi  rasgele değişkenlerine uygulanabilir. Buna göre,  iken,



dir. Buradan ,

****

şeklinde yazıldığında  iken  nın asimptotik dağılımı için



elde edilir. Diğer taraftan  iken,

****

ve



olduğu göz önüne alındığında asimptotik dağılım  iken



şeklinde elde edilmiş olur.

**c)**  olsun. Bu durumda regresyon modeli ,  şeklindeki AR(1) modeline dönüşür. Model  için durağandır. O halde,  olduğunu kabul edelim.

Seri durağan olduğundan  iken



olduğunu bir önceki kısımdan biliyoruz. Buradan, 



veya



olarak yazılabilir.  yazıldığında  ler bağımsız değildir. Bununla birlikte herhangi  ve  rasgele değişkenleri için  özelliği kullanılırsa,  lerin beklenen değer ve varyansı





olarak bulunur. Benzer şekilde,



olup, model durağan olduğundan  şeklinde yazılır. Buna göre,  pozitif reel bir sabit olmak üzere,



dir.  bir beyaz gürültü serisi olmasına rağmen bağımsız değildir. Ayrıca  ve  şeklinde olup,  için,  olduğundan  ile  arasındaki kovaryans



dır. Yani,  nin otokovaryans fonksiyonu,



şeklindedir.  olmasına rağmen  ler bağımsız değildir. Dolayısı ile, MLT nin ifadesinde verilen koşullar sağlanmadığından MLT uygulanamaz.  için  ve  ler bağımsız olsaydı,



ve



olup,

 veya 

yazılabilirdi. MLT nin geçerli olması halinde,  iken



elde edilirdi. Diğer taraftan,  iken



olduğundan, iki sonuç Slutsky teoremi ile birleştirilerek  iken



şeklinde asimptotik dağılım elde edilirdi. İfadede  nin değeri yerine konulduğunda,  nın asimptotik dağılımı  iken



şeklinde bulunmuş olur

Merkezi limit teoreminde bağımsızlık önemli bir varsayımdır. Ek varsayımlar altında merkezi limit teoremi geçerlidir.

**Teorem 3.4.1** (Hamilton, 1994, s.195)  rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenler ve ,  olsun.  zaman serisi modeli,



olarak yazıldığında  iken,



dir

Burada ,  zaman serisinin otokovaryans fonksiyonudur. Teoreme göre,  zaman serisi durağan ise merkezi limit teoremi uygulanabilir.

**Örnek 3.4.3** İkinci bölümde öngörülerin kitle ortalamasına, örneklem ortalamasının kitle ortalamasına yaklaştığını söylemiştik. AR(1) modeline uygun olarak üretilen ve satırlar halinde aşağıdaki tabloda verilen 100 verinin zaman serisi grafiği ile, otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarının grafikleri aşağıdadır.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 10.49 | 11.39 | 11.46 | 11.43 | 10.61 | 10.49 | 10.19 | 9.00 | 9.50 | 11.22 |
| 11.21 | 12.65 | 11.88 | 12.15 | 10.62 | 10.89 | 8.90 | 8.00 | 8.50 | 9.10 |
| 8.00 | 8.50 | 8.80 | 9.40 | 10.60 | 10.02 | 9.60 | 8.00 | 9.00 | 9.20 |
| 8.80 | 9.10 | 10.83 | 11.95 | 11.10 | 12.33 | 10.30 | 9.20 | 8.60 | 9.10 |
| 9.20 | 9.20 | 9.10 | 10.30 | 9.60 | 10.16 | 8.50 | 9.70 | 9.20 | 9.80 |
| 8.10 | 7.90 | 8.00 | 6.80 | 7.60 | 8.30 | 7.70 | 7.90 | 6.60 | 7.20 |
| 8.30 | 9.00 | 9.70 | 8.90 | 10.13 | 9.70 | 10.46 | 12.35 | 10.75 | 11.75 |
| 11.30 | 11.54 | 11.91 | 12.40 | 10.97 | 11.87 | 9.60 | 9.90 | 9.80 | 9.50 |
| 10.60 | 11.37 | 10.51 | 10.53 | 8.90 | 10.12 | 9.90 | 10.30 | 7.70 | 6.00 |
| 7.10 | 5.00 | 6.80 | 7.50 | 6.90 | 7.00 | 7.10 | 7.90 | 8.00 | 9.10 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Seri | ACF | PACF |
|  |  |  |

Grafiklerden, kısmi otokorelasyonların birinci gecikmeden sonra hızla sıfıra yaklaştığı gözlenmektedir. Birinci kısmi otokorelasyon %95 lik güven sınırının dışında olup diğerleri %95 lik güven sınırının içindedir. Ayrıca otokorelasyonların azaldığı görülmektedir. AR(1) serilerinin bu özelliklere sahip olduğunu ikinci bölümden biliyoruz. Buna göre verilere,



şeklinde bir modelin uygun olduğu düşünülürse, örneklem ortalaması  olup  parametresinin tahmin değeri (SAS PROC ARIMA )  olarak gözlenmiştir. Verilere  şeklinde AR(1) modelinin uygun olduğu dikkate alınarak, ilk 20 öngörü hesaplanarak aşağıda verilmiştir. SAS’da PROC ARIMA’ya göre ’nün tahmin değeri  dur.

|  |
| --- |
| 100 veri ve hesaplanan 20 öngörü |
| Image320 son hali |

Görüldüğü gibi öngörüler  değerine yaklaşmaktadır. Bu öngörülerden ilk 20 tanesi aşağıdadır.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 9.2110 | 9.2998 | 9.3710 | 9.4279 | 9.4736 | 9.5101 | 9.5393 | 9.5628 | 9.5815 | 9.5965 |
| 9.6086 | 9.6182 | 9.6259 | 9.6321 | 9.6370 | 9.6410 | 9.6442 | 9.6467 | 9.6488 | 9.6504 |

 olup değer mutlak değerce 1 den küçüktür ve önerilen AR(1) modeli durağandır. O halde,  zaman serisi,  olmak üzere,  şeklinde yazılabilir. Teorem (3.4.1) den, örneklem ortalamasının asimptotik dağılımının  iken,



olduğu söylenebilir. Buradaki,  asimptotik varyans değeri serinin varyansıdır ( ). Model AR(1) olduğundan,



dir. Bu değer,  olarak hesaplanmıştır. Asimptotik dağılım kullanılarak  için yaklaşık %95 lik güven aralığı



şeklinde yazılabilir.  (%5 anlam düzeyi) için  değeri yerine konulduğunda %95 lik güven aralığı,

 veya 

olarak elde edilir. Buradan, öngörülerin uzun dönemde bu aralık içinde olacağı %95 lik bir güven ile söylenebilir

**Teorem 3.4.2** (Fuller, 1996, s.235)  rasgele değişkenleri aşağıdaki özellikleri sağlasın.

*i)* 

*ii)*  için 

*iii)* 

Bu durumda, MLT geçerlidir. Yani,  iken



dir

Burada, , ve  dir.

Örnek (3.4.2c) de asimptotik dağılım bulunurken  ler için Teorem (3.4.2) deki ilk iki koşulun sağlandığı gösterilmişti. Şimdi, aynı problem için teoremdeki (iii) koşulunun sağlandığını görelim. Örnekteki rasgele değişkenlerin teoremin (iii) koşulundaki ifadeler



ve  olarak hesaplandığında  iken,



şeklinde elde edilir. Yani, Teorem (3.4.2) nin bütün koşulları sağlanır. Buna göre Teorem (3.4.2) den, MLT geçerli olduğu görülür. Yani ,  iken



dir.

İstatistikte sonuç çıkarımlar (hipotez testleri, parametreler ve öngörüler için güven aralıkları yazılması gibi) yapılırken merkezi limit teoremi çok önemlidir. Verilen bir zaman serisinin kısmi otokorelasyonlarından birincisi anlamlı olarak sıfırdan farklı görünmesine rağmen, ikinci kısmi otokorelasyon güven sınırları etrafında olabilir. O zaman serinin AR(2) mi yoksa AR(1) olarak mı modelleneceği tartışılmalıdır. Yani verilerin,



veya



olarak mı modellenmesi gerektiği sorusu sorulmalıdır. Başka bir deyişle,  hipotezinin  alternatif hipotezine karşı test edilebilmesi için  nin tahmin edicisinin asimptotik dağılımına ihtiyaç vardır.

Diğer taraftan, verilen herhangi bir zaman serisi



şeklinde AR(1) olarak modellenirse öngörüler,  parametresinin tahmin değerine göre değişir. Bunun için eldeki veriler kullanılarak, tahmin edicinin asimptotik dağılımı bilindiğinde  için güven aralığı yazılabilir.  in EKK tahmin edicisinin asimptotik dağılımı normal ise,  için %95 lik güven aralığı,  şeklinde olur.  in EKK tahmin edicisinin asimptotik dağılımı için durağanlığın önemli olduğu unutulmamalıdır. Seri durağan değil ise  nın asimptotik dağılımı normal olmayabilir.

**Örnek 3.4.4**  ve  olsun. AR(1) zaman serisi modeli de  olarak verilsin. Model  için durağan değildir.  nun EKK tahmin edicisinin bulunması için durağanlığa ihtiyaç yoktur. Bu tahmin edici



şeklinde olup bu ifade biraz düzenlendiğinde ,



şeklinde yazılabilir. Eşitlik  için,



şeklindedir.  nın pay ve paydasındaki ifadelerin yakınsama hızları önceki kısımda açıklandığı gibi bulunur. Önce,  nin payındaki toplamın yakınsama hızını bulalım.  olduğundan  olup,  nın payındaki toplam



olarak yazılabilir.  ler beklenen değeri  varyansı  olan bağımsız rasgele değişkenler olduğundan  ifadesindeki pay kısmının beklenen değeri





olup diğer momentler







olarak hesaplanmıştır (Fuller, 1996, s.547). Buna göre,

 ve 

olup,



şeklinde yazılabilir. Buradan,  iken



elde edilir. Diğer taraftan,  nin yakınsama hızı



olarak elde edilir.  nin asimptotik dağılımı normal değildir. Bu dağılım Dickey-Fuller dağılımlarından biridir ve beşinci bölümde detaylı bir şekilde incelenecektir

**Örnek 3.4.5**  olmak üzere  olsun. Beyaz gürültü serisinin örneklem otokovaryansları,



formülü ile hesaplanır.  tahmin edicisinin asimptotik dağılımını bulalım.  ler beyaz gürültü serisi olduğundan,

 ve 

dir.  denirse,



olup, Teorem (3.4.2) nin (i) koşulu sağlanır.  ve  beyaz gürültü serisi olduğundan  için (ii) koşulu da sağlanır. Teoremin (iii) koşulu için



ve



hesaplandığında,



olup  iken,



olasılıkta yakınsama elde edilir. Buradan, Teoremin bütün koşulları sağlanır ve  rasgele değişkenlerine MLT uygulanabilir. Yani, asimptotik dağılım  iken



şeklinde elde edilmiş olur.

Otokovaryans fonksiyonunun tahmin edicisini,

olarak yazalım. Sabit  için eşitliğin sağındaki ikinci terim



dir.  yeniden düzenlenerek



olarak da yazılabilir. Kolayca görüleceği gibi,



olduğundan  iken



veya  bulunur.  ler normal rasgele değişkenler ise  ile  arasındaki kovaryans



dir (Fuller (1996, s. 316))

Otokorelasyon fonksiyonu  şeklinde tahmin edilir.  ler beyaz gürültü serisi olduğundan otokovaryanslar  ve  dir. Buna göre,  iken  olduğundan Teorem (3.4.2) ile Slutsky Teoremi beraber kullanıldığında  nin asimptotik dağılımı  iken  dir. Ayrıca, Teorem (3.2.2b) den,  iken  asimptotik dağılımı da yazılabilir.

 rasgele değişkenlerinin altıncı momenti sonlu () ise otokorelasyonların tahmin edicileri arasındaki kovaryans



dir (Fuller (1996, s.319)). Buna göre,  ler normal olduğundan bağımsızdır. Buradan, Box-Pierce istatistiği olarak bilinen ve belli sayıdaki otokorelasyonların sıfırdan farklı olup olmadığının sınanması için kullanılan  istatistiğinin asimptotik dağılımı ki-karedir (Enders, 2002, s.68).  tane otokorelasyonun sıfır olduğunu test etmek için  istatistiği,



olarak yazılır. Asimptotik dağılım ise,  iken



dir.  istatistiğinin modife edilmiş hali olan Ljung-Box istatistiği de ,



şeklindedir.  olmak üzere,  istatistiğinin asimptotik dağılımı da,  iken



dir (Wei, 2006, s.153). Burada,  istatistiği, herhangi bir  zaman serisi ARMA(p,q) olarak modellendiğinde, artıklar serisinin beyaz gürültü serisi olup olmadığını sınamak için kullanılır.  istatistiği de, herhangi bir serinin belli sayıdaki otokorelasyonlarının anlamlı olup olmadığını sınamak için kullanılır (Enders, 2002).  istatistiği zaman serilerinde ARCH etkisinin bulunup bulunmadığının sınanmasında (Enders, 2010, s.436) da kullanılmaktadır.

Herhangi bir AR(2) zaman serisi,  olmak üzere,



olarak verilmiş olsun. Bu model

,  ,  , 

olmak üzere,  şeklinde lineer model gibi yazılabilir.  nın EKK tahmin edicisi,  olup bu tahmin edici, lineer regresyon modelinde olduğu gibi bir çok istatistiksel özelliği (yansızlık, en küçük varyanslı olması gibi) sağlamaz. İstatistiksel özellikler doğrudan sağlanmasa da bazıları asimptotik olarak sağlanır. Tahmin edici açık olarak,



şeklinde ifade edilebilir. Burada  yerine  yazılırsa



ve





eşitlikleri elde edilir. Buradan, 



şeklinde yazılır. Eşitliğin sağ tarafı biraz daha düzenleme ile,





şeklinde yazılabilir. Matrisin içindeki terimlerin  ile çarpılıp bölünmesi ile



eşitliği elde edillir.  zaman serisi durağan olduğundan  iken

,  ve 

olasılıkta yakınsamalar geçerlidir. Bu yakınsamalardan  iken,



elde edilir. Dolayısı ile  nın asimptotik dağılımı için



istatistiğinin asimptotik dağılımının bulunması yeterlidir. Bu istatistiğin birinci bileşeninin asimptotik normal olduğu gösterilmişti (Örnek 3.4.2c). Benzer şekilde ikinci bileşenin de asimptotik normal olduğu gösterilebilir. Rasgele vektörün her iki bileşeninin de asimptotik normal olması, rasgele vektörün asimptotik normalliği için yetmez. Ortak dağılımın asimptotik normal olduğunun gösterilmesi gerekir. Bunun için,  nin her bir lineer birleşiminin asimptotik normal olduğunun gösterilmesi gerekir. Dolayısı ile,  nin asimptotik normal olduğunun gösterilmesi gerekir.  istatistiği



olarak yazıldığında, Teorem (3.4.2) nin koşullarını sağlaması gerekir. Bunun için  denirse koşullu beklenen değer,



olup Teoremin (i) koşulu sağlanır. (iii) koşulu için,





ve  olduğu görülür. Buradan da,  iken



olasılıkta yakınsamadan teoremin (iii) koşulu da sağlamış olur. Son olarak, merkezi limit teoreminin uygulanabilmesi (ii) koşulunun sağlatılması gerekir.

Önce,  ise,  ve  olduğu açıktır. Seri durağan olduğundan  zaman serisi  olacak şekilde  katsayıları vardır ve  olarak yazılabilir. Buradan  ve  iken



elde edilir. Yani, Teorem (3.4.2) nin bütün koşulları sağlar ve



rasgele değişkenlerine MLT uygulanabilir. Dolayısı ile,  iken



şeklinde dağılımda yakınsama elde edilmiş olur. Buradan,



olup iken,



dır. Slutsky teoremi ve Teorem (3.4.2) den asimptotik dağılım  iken



veya



şeklinde elde edilir. Ayrıca,

 ve 

olup, iki boyutlu istatistiğin asimptotik dağılımı  iken

,

şeklinde elde edilir. Bulunan sonuçlar birleştirildiğinde  olmak üzere,  nın asimptotik dağılımı  iken



olarak bulunur.

Bu sonuç, daha yüksek dereceden AR modelleri için de geçerlidir. Herhangi bir AR(p) zaman serisi modeli,



olarak verildiğinde,  nın EKK tahmin edicisi,  olup durağanlık varsayımı altında asimptotik dağılım  iken,



dir (Hamilton, 1994, s.215-216). Burada,



dir.

AR(2) modeli kesim noktası bulunmayan regresyon modeli gibi ele alınsın.  beyaz gürültü serisinin varyansı  nin EKK tahmin edicisi,



şeklindedir. Burada  yerine  yazılırsa,



eşitliği elde edilir. Bu ifade biraz daha düzenlenerek 







şeklinde yazılabilir. Daha önce görüldüğü gibi,  ve  olup serinin durağanlığından





eşitlikleri yazılabilir. Zayıf büyük sayılar yasasına göre  iken,



elde edilir. Yani,  nin EKK tahmin edicisi  iken



olduğundan  için tutarlıdır.

Durağan AR(2) modeli  olmak üzere,



şeklinde verilmiş olsun. Bu model regresyon modeli gibi düşünüldüğünde  hipotezinin  alternatif hipotezine karşı test edilmesi için  test istatistiği kullanılır. İstatistiğin asimptotik dağılımı, regresyon modelinin varsayımları sağlanması halinde, serbestlik derecesi  olan dağılımıdır. Yani,  dir.

Durağan AR(2) modelinde  parametresinin en EKK tahmin edicisi asimptotik normaldir. O halde,  hipotezinin  alternatif hipotezine karşı test edilebilmesi için  istatistiği kullanılabilir ve bu istatistiğin asimptotik dağılımı da serbestlik derecesi  olan dağılımıdır, .

Bu yorum daha yüksek dereceden durağan AR modelleri için de geçerlidir.  olmak üzere, AR(p) zaman serisi modeli



şeklinde verilmiş olsun.  hipotezi red edilemez ise, seri AR(2) olarak modellenebilir.  hipotezi altında indirgenmiş model  dir. Her iki model regresyon modeli gibi düşünüldüğünde, regresyon hata kareler toplamlarını  ve  ile gösterelim. İndirgenmemiş modelin hata kareler ortalamasına da  diyelim. Buna göre,



istatistiğinin dağılımı  ve  serbestlik dereceleri ile  dir (Fuller, 1996, s.413). Regresyon sonuçlarından hesaplanan  değeri, belirlenmiş bir anlam düzeyindeki tablo değeri ile karşılaştırılarak,  hipotezi hakkında istatistiki sonuç çıkarım yapılır.

**Örnek 3.4.6** Aşağıda bir zaman serisine ait 100 veri satırlar halinde verilmiştir. Verilere ilişkin zaman serisi grafiği ile otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarının grafikleri de aşağıdadır.

Grafiklerinden, kısmi otokorelasyonların ikinci gecikmeden sonra sıfır (%95 lik güven sınırları içinde), otokorelasyonların ise hızla azaldığı görülmektedir. Buna göre seri AR(2) olarak modellenmelidir. Parametrelerin tahmin edicilerinin asimptotik dağılımları durağanlık varsayımına bağlıdır. Bu nedenle herhangi bir sonuç çıkarım için serinin durağanlığı da sınanmalıdır. Durağanlık testleri ileriki bölümlerde inceleneceğinden şimdilik serinin durağan olduğunu varsayalım.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 8.31 | 10.51 | 11.85 | 12.22 | 10.51 | 9.34 | 9.13 | 6.70 | 5.72 | 6.14 |
| 7.69 | 9.88 | 12.34 | 13.49 | 15.46 | 14.65 | 15.24 | 17.08 | 19.28 | 18.53 |
| 16.92 | 14.27 | 13.30 | 12.46 | 13.03 | 11.82 | 10.40 | 10.68 | 10.77 | 11.63 |
| 12.10 | 11.41 | 11.53 | 11.51 | 10.99 | 12.33 | 12.21 | 11.26 | 10.13 | 11.44 |
| 11.49 | 11.79 | 11.39 | 11.86 | 11.21 | 11.19 | 8.88 | 7.14 | 6.79 | 5.23 |
| 4.53 | 4.97 | 6.64 | 7.48 | 8.02 | 7.42 | 7.89 | 9.27 | 9.85 | 11.46 |
| 11.26 | 10.05 | 8.85 | 8.57 | 8.86 | 8.44 | 9.27 | 10.59 | 11.36 | 11.19 |
| 8.49 | 9.70 | 10.34 | 9.60 | 10.45 | 10.83 | 10.45 | 10.62 | 9.18 | 7.77 |
| 6.82 | 7.72 | 10.00 | 11.69 | 13.81 | 16.49 | 16.55 | 16.71 | 16.09 | 16.39 |
| 16.98 | 17.21 | 16.78 | 15.90 | 15.20 | 14.47 | 14.06 | 14.88 | 13.85 | 14.25 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Seri | ACF | PACF |
|  |  |  |

Verilerin aritmetik ortalaması  olup  nin  ve  üzerine regresyonundan kestirim denklemi ile parametrelere ait standart hataları (parantez içinde),



olarak elde edilmiştir. Ayrıca,  ve  olarak gözlenmiştir. Modele kesim noktası (intercept) eklenmesi halinde kestirim denklemi ve diğer sonuçlar



 ve  olarak elde edilmiştir. Her iki kestirim denkleminden de görüldüğü gibi, katsayılar birbirine çok yakındır.

Model parametrelerinin tahmin değerleri Yule-Walker denklemlerinden de bulunabilir. AR(2) modeli için Yule-Walker denklemleri

 ve  için 

şeklindedir. Otokorelasyon fonsiyonunun simetriklik özelliği kullanıldığında  için

 ve 

eşitlikleri yazılır. Buradan,



denklem sistemi çözülerek, parametrelerin Yule-Walker tahmin edicilerinin



şeklinde olduğu görülür. Otokorelasyonların tahmin değerleri yerine yazıldığında  ve  parametrelerinin Yule-Walker tahmin değerleri,



şeklinde hesaplanır. Parametre tahmin değerleri ile EKK tahmin değerleri arasında farklılıklar vardır.

Verilere AR(5) modelinin (Model I) uygun olabileceğini düşünülerek modelin AR(2) olup olamayacağını sınamak isteyelim. İki model

Model**I**: 

Model **II**: 

şeklinde yazıldığında Model I ve Model II olarak adlandırılan modellere ait regresyon sonuçları aşağıda verilmiştir.

*Model* AR(2) hipotezinin *Model* AR(5) alternatif hipotezine karşı testi için  istatistiğinin değeri kullanılabilir.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Model I** | | | | |
| Parametre | Tahmin | Std. Hata | ist. | değeri |
| intercept | 1.0389 | 0.0437 | 2.523 | 0.0134 |
|  | 1.3581 | 0.1047 | 12.963 | 0.0001 |
|  | -0.3956 | 0.1784 | -2.217 | 0.0292 |
|  | -0.0576 | 0.1864 | -0.309 | **0.7579** |
|  | -0.0145 | 0.1810 | -0.080 | **0.9360** |
|  | 0.01479 | 0.1048 | 0.141 | **0.8881** |
| , , | | | | |

 istatistiğinin hesaplanan () değeri,



dır. Bu değer tablo değeri ile karşılaştırıldığında (dağılımın serbestlik dereceleri  ve  olduğunda  ve  olması gerekir. Oysa, regresyon analizi yapılırken  gibi geçmiş değerler göz önüne alındığında serbestlik derecelerinde azalma olur)



olup  yokluk hipotezi red edilemez. O halde, verilen zaman serisinin AR(2) olarak modellenmesi uygundur.

Şimdi,  modelini göz önüne alalım ve  hipotezini  alternatif hipotezine karşı test etmek isteyelim.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Model II** | | | | |
| Parametre | Tahmin | Std. Hata | ist. | değeri |
| intercept | 1.06488 | 0.3821 | 2.786 | 0.0064 |
|  | 1.38063 | 0.08874 | 15.558 | 0.0001 |
|  | -0.4738 | 0.08864 | -5.345 | 0.0001 |
| , , | | | | |

Tek bir parametrenin sıfır olup olmadığı test edilmek istendiği için testi kullanılabilir. istatistiğinin değeri (yukarıdaki tablodan ) mutlak değerce tablo değerinden büyük olduğundan  hipotezi red edilir (). Başka bir ifade ile Model **II** red edilemez. Yani, veriler AR(2) modeline uygundur. Burada, dağılımın serbestlik derecesi  yerine  alınmıştır. Bunun nedeni, regresyon analizi yapılırken  nin  ve  üzerine regresyonu yapıldığında, analizlerde  yerine  veri kullanılmıştır. Aynı sonuç çıkarım yukarıdaki  testi yardımı ile de yapılabilir. Bunun için modeller,

Model **I**: 

Model **III**: 

şeklinde yazılır. Model **I** için regresyon sonuçları yukarıda verildi. Model **III** için regresyon sonuçları da aşağıdadır.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Model III** | | | | |
| Parametre | Tahmin | Std. Hata | ist. | değeri |
| intercept | 0.8191 | 0.4289 | 1.909 | 0.0592 |
|  | 0.9327 | 0.03658 | 25.493 | 0.0001 |
| , , | | | | |

Buradaki tablo değerleri kullanılarak,  istatistiğinin değeri



olarak hesaplanmıştır.  olduğundan *Model* AR(1) yokluk hipotezi *Model* AR(5) alternatifine karşı red edilir

Buraya kadar, verilen bir zaman serisinin modellenmesinde önemli olan otokorelasyonların sıfır olup olmadığının test edimesi ile AR serilerinde durağanlık varsayımı altında, model parametrelerinin anlamlı olup olmadığının sınanması üzerinde duruldu. Kısmi otokorelasyonlar da regresyon parametreleri ile ilişkili olduğundan kısmi otokorelasyonların testi regresyon parametrelerinin test edilmesi ile aynıdır. İkinci bölümde, kısmi otokorelasyonlar, otokorelasyonlar yardımı ile hesaplanmıştı. Serinin  kısmi otokorelasyonları,



ve



matrisleri kullanılarak nci kısmi otokorelasyon  dır. Kısmi otokorelasyon,  nin  üzerine regresyonu yapıldığında  nin katsayısıdır. Durağan AR serilerinde kısmi otokorelasyonlar serinin model derecesinin belirlenmesinde önemli bir araç olduğundan modelleme ilgili sonuç çıkarımların regresyon teknikleri ile yapılması yeterlidir.