BİRİNCİ BASAMAKTAN TAM DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Eğer $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ denkleminin sol yanı bir f(x,y) fonksiyonunun diferensiyelini almakla elde edilebiliyorsa ya da başka bir deyişle

$$df(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

olacak şekilde bir f(x,y) fonksiyonu mevcutsa verilen denkleme Tam Diferensiyel denklem adı verilir.

Eğer $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ fonksiyonları sürekli ve xy-düzlemi üzerinde bir dikdörtgensel bölge üzerinde birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahipse verilen denklemin Tam diferensiyel denklem olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

dir.

Verilen denklemi çözmek için öncelikle *f(x,y)* fonksiyonu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)$$

denklemlerinden elde edilir. Verilen denklemin genel çözümü de, c keyfi integral sabiti olmak üzere;

$$f(x,y) = c$$

ile ifade edilir.

Örnek 1. $(y + 2xy^3)dx + (1 + 3x^2y^2 + x)dy = 0$ denkleminin genel çözümünü elde ediniz.

Çözüm. $P(x,y) = (y + 2xy^3)$ ve $Q(x,y) = (1 + 3x^2y^2 + x)$ için

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 1 + 6xy^2 = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

olduğundan verilen denklem Tam'dır. Buna gore öyle bir $f(x,y)$ fonksiyonu vardır ki;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2xy^3 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 + 3x^2y^2 + x \quad (1b)$$

eşitlikleri sağlanır. (1a)'da her iki tarafın x'e gore integrali alınırsa;

$$f(x,y) = xy + x^2y^3 + h(y)$$

elde edilir. Son ifadenin y'e gore türevi alınırsa;

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 3x^2y^2 + h'(y)$$

elde edilir. Dikkat edilirse bu son denklem ile (1b)'nin sol tarafları birbirine eşittir. Dolayısıyla sağ taraflar da birbirine eşitlenerek;

$$h'(y) = 1$$

ve buradan da

$$h(y) = y + c_1$$

bağıntısı elde edilir. Burada c_1 integral sabitidir. h(y)'nin f(x,y)'de yerine yazılmasıyla aranan fonksiyon;

$$f(x,y) = xy + x^2y^3 + y + c_1$$

şeklinde elde edilir. Buna gore diferensiyel denklemin genel çözümü;

$$xy + x^2y^3 + y = c$$

biçiminde elde edilir.

Örnek 2. $2xe^{2y}dy + (1 + e^{2y})dx = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm.

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2e^{2y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

olduğundan denklem Tam diferensiyel denklemdir.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + e^{2y} \qquad (2.a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{2y} \qquad (2b)$$

denklemlerinin ilkinden x'egöre integral alınırsa

$$f(x,y) = x + xe^{2y} + h(y)$$

elde edilir. h(y) yi bulmak için yukarıdaki denklemden y'e gore türev alınırsa,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{2y} + h'(y)$$

elde edilir. (2b)'den,

$$h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c_1$$

elde edilir. Buradan verilen diferensiyel denklemin genel çözümü;

$$x + xe^{2y} = c$$

biçiminde elde edilir.