

## 5. DAİRESEL HIZLANDIRICILAR: BETATRON VE MİKROTRON

### 5.1. Giriş

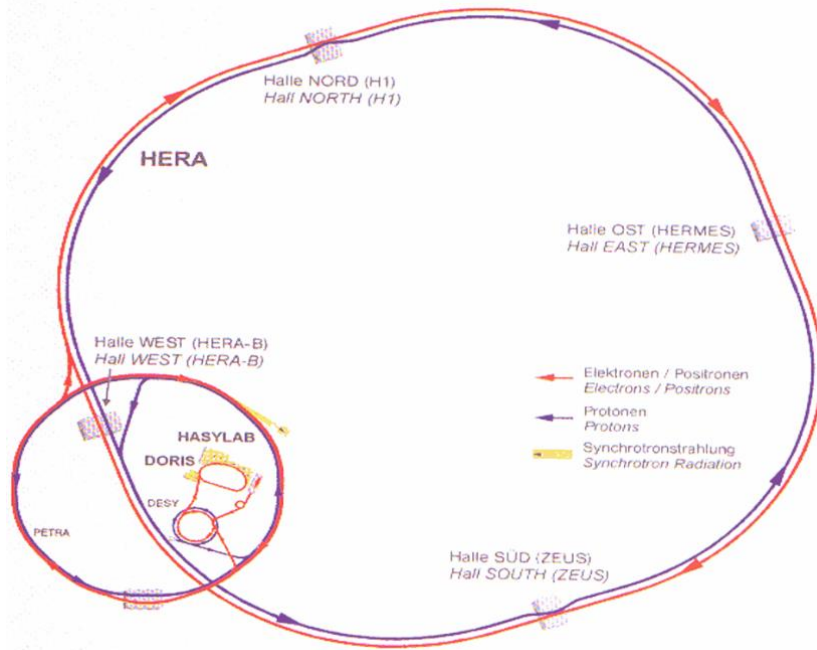
Dairesel hızlandırıcılar yüklü parçacıkları RF kavitelemeler yardımıyla hızlandıran ve bükücü magnetler (bending magnet) aracılığı ile bükerek dairesele yörüngelerde tutan hızlandırıcılardır. Dairesel hızlandırıcılarda parçacıklar aynı RF kaviteden her dolanımda tekrar geçtiklerinden, doğrusal hızlandırıcılardaki gibi çok RF kavite kullanımına gerek duyulmaz. Bu yaklaşım yüksek enerjili parçacık demetleri oluşturmak için mükemmel bir çözüm gibi görünse de, dairesele hızlandırıcılarda özellikle hafif parçacıklar için (elektron vb.) ortaya çıkan sinkrotron ışınımı ile enerji kaybı meydana gelmekte ve bu kayıp demetlerin yüksek enerjilere ulaşmasının önüne geçmekte ve engel olmaktadır.

Işınım yoluyla kaybolan enerji, demet her turda RF kaviteden geçildiği için geri kazandırılmabilmektedir. Protonlar ve iyonlar gibi ağır parçacıkların hızlandırılmasında sinkrotron ışınımıyla enerji kaybı çok daha düşük oranda olduğundan, özellikle yüksek enerjili ağır parçacık (proton, iyon vb.) hızlandırıcılarında dairesele hızlandırıcılar (örn. Sinkrotron) öne çıkmaktadır.

Günümüzde proton sinkrotronlarında ulaşılan en yüksek enerji yaklaşık 10 TeV mertebesinde iken (LHC (CERN)  $E_p=7$  TeV (2015)), elektron hızlandırıcılarında 100 GeV mertebesinde (LEP (CERN)  $E_e= 100$  GeV (2000)).



Şekil 5.1. DESY' deki dairesel HERA ve PETRA hızlandırıcılarının yerleşimi

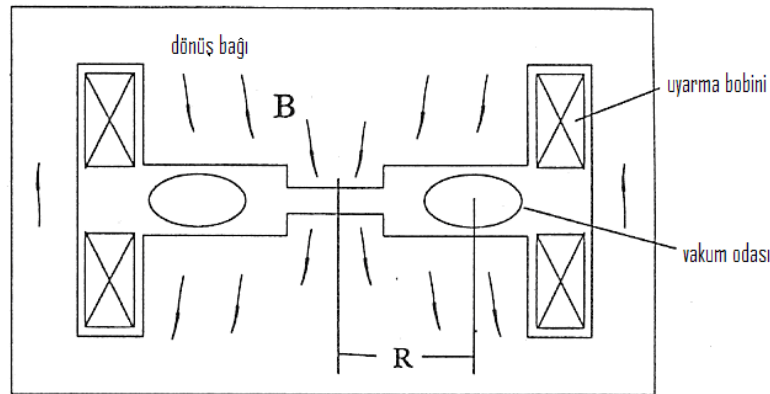


Şekil 5.2. DESY'deki (Hamburg, Almanya) dairesel hızlandırıcıların şematik planı

## 5.2 Betatron

Betatron, geliştirilmiş ilk dairesel elektron hızlandırıcısıdır ve elektronlar, dairesel bir yüzeyden geçen ve zamanla değişen manyetik akının ürettiği bir elektromotor kuvveti ile söz konusu daire etrafında oluşturulan vakumlu bir ortam içinde hızlandırılırlar.

Elektronlar her turda değişen manyetik alanın ürettiği elektromotor kuvvete karşı gelen bir enerji kazanmaktadır. Şekil 5.3'te Betatronun enine kesiti ve bileşenleri görülmektedir.



Şekil 5.3. Betatronun enine kesiti ve ana bileşenleri

Hızlandırma alanı Maxwell denklemlerinden integrasyonla bulunabilir:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt} \quad (5.1)$$

$$\oint \vec{E} ds = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \quad (5.2)$$

Elektronlar düzgün bir manyetik alandan kaynaklanan Lorentz kuvvetinin etkisi altında dairesel yol boyunca hareket ederler. Bu sebeple, silindirik koordinatlar  $(r, \varphi, s)$  kullanılır. Lorentz kuvveti merkezcil kuvvet tarafından karşılanır. Dengede hareket denklemi;

$$\frac{\gamma m v^2}{r} - \frac{e}{c} v B_{\perp} = 0 \quad (5.3)$$

şeklindedir. Burada  $\gamma$  parçacığın durgun kütlesi cinsinden enerjisidir. Manyetik alan dairesel yörünge düzlemine dik doğrultudadır. Eşitlik 5.3' ten parçacığın momentumu bulunabilir.

$$p = \gamma m v = \frac{e}{c} r B_{\perp} \quad (5.4)$$

Hızlandırıcı kuvvet, momentumun değişim oranına eşittir ve Eşitlik 5.4'ün zamana göre türevinden elde edilir:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{e}{c} \left( \frac{dr}{dt} B_{\perp} + r \frac{dB_{\perp}}{dt} \right) = e E_{\phi} \quad (5.5)$$

Wideroe, sabit yörüngeli parçacıklar için, parçacıkların manyetik alanı çevreleyecek şekilde, vakum odayı çember şeklinde dolandıkları sistemi geliştirmiştir. Parçacıklar tarafından çevrelenen manyetik alanın düzgün ya da en azından rotasyonel olarak simetrik olduğu varsayıldığından, indüklenen elektrik alanın yalnızca  $E_{\phi}$  bileşeni bulunmaktadır. Eşitlik 5.2'ye dönersek;

$$\oint \vec{E} ds = - \int E_{\phi} R d\phi = -2\pi R E_{\phi} \quad (5.6)$$

elde edilir. Burada pozitif bir alan için, indüklenen açısız (azimutal) alanın negatif oluşuna dikkat edilmelidir. Diğer taraftan Eşitlik 5.5' ten;

$$e E_{\phi} = \frac{e}{c} R \frac{dB(R)}{dt} \quad (5.7)$$

ve Eşitlik 5.6 ve 5.7 de kullanılarak,

$$\frac{d\phi}{dt} = 2\pi R^2 \frac{dB(R)}{dt} \quad (5.8)$$

eşitliği elde edilir.

Parçacık yörüngesince çevrelenen toplam manyetik akı, parçacık yörüngesince çevrelenmiş ortalama alan cinsinden ifade edilebilir.  $\phi = \pi R^2 \bar{B}(R)$  olduğunu biliyoruz, burada  $\bar{B}(R)$ , R yarıçapının çevrelediği ortalama manyetik indüksiyondur.

$$\frac{d\phi}{dt} = \pi R^2 \frac{d\bar{B}(R)}{dt} \quad (5.9)$$

Bu sonucu Eşitlik 5.8 ile karşılaştırıldığında Wideroe' nin  $\frac{1}{2}$  koşulu elde edilir.

$$B(R) = \frac{1}{2} \bar{B}(R) \quad (5.10)$$

Yörüngedeki alanın, yörünge düzlemini geçen ortalama alanın yarısı olması şartı yörüngenin kararlılığını sağlamaktadır.

Bir betatronun temel bileşenleri için şekilde gösterildiği gibi farklı açıklığa sahip iki manyetik boşluk tanımlanabilir. Bunlardan birisi  $r = R$ 'de demetin yörünge boyunca eğilmesini sağlar. Merkez dönüş bağının ortasında bulunan boşluk ayarlanabilir ve Wideroe'nin  $\frac{1}{2}$  şartının sağlanması için magnet ayarlanır. Manyetik alan genellikle ana elektrik kaynağıyla aynı AC frekanslı rezonans devre tarafından uyarılır. Bu düzenlemede magnet bobinleri indüktans gibi davranır ve 50-60 Hz AC frekansına ayarlanmış bir kapasitör kümesine paralel bağlanır.

Eşitlik 3.5' in zamana göre integrasyonu ile momentumdaki değişim elde edilir.

$$\Delta p = \frac{e}{c} R \int \frac{dB_{\perp}}{dt} dt = \frac{e}{c} R \Delta B_{\perp} \quad (5.11)$$

Görüldüğü gibi momentumdaki manyetik alandaki değişimin miktarı ile orantılıdır ve manyetik alanın türevinden bağımsızdır.

Maksimum parçacık momentumu, hızlandırma turu boyunca yörüngedeki maksimum manyetik alana ve yarıçapa bağlıdır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$p_{max} = \frac{e}{c} RB_{max}(R) \quad (5.12)$$

Kararlılık koşulu parçacık parametrelerine bağlı olmadığından, betatron prensibi tüm enerjiler ve tüm yüklü parçacıklar için geçerlidir. Bununla birlikte betatron, proton gibi ağır parçacıklar için uygun bir hızlandırıcı değildir.

### **Örnek: Kerst Betatronu**

Kerst betatronu için  $R= 1.23 \text{ m}$  dir ve yörüngedeki maksimum alan  $8.1 \text{ kG}$  dir. Kerst betatronunda ulaşılan maksimum momentumu bulunuz.

### **Çözüm:**

Eşitlik 5.12' den

$$P_{max} = \frac{C_p}{c} B[kG]R[m]$$

$$C_p = e = 0.02997926 \text{ GeV} / [kG]m$$

$$c = 2,99.10^8 \frac{m}{s}$$

$$P_{max} = \frac{0,0299}{c} \times 8,1 \times 1,23 \text{ GeV}$$

$$P_{max} = 298 \frac{MeV}{c}$$

Deneyisel uygulamalarda kinetik enerji ( $E_{kin} = \sqrt{(cp)^2 + (mc^2)^2} - mc^2$ ) öne çıkmaktadır.

Bu durumda yukarıda verilen örnek için elektronun durgun kütle enerjisi ( $\sim 0.5 \text{ MeV}$ ) bu kinetik enerji yanında ihmal edilirse;

$$E_{kin} \approx cp = 300 \text{ MeV} \quad (5.13)$$

yazılabilir. Bunun tersine proton için Kerst Betatronu ile ulaşılabilecek kinetik enerjinin protonun durgun kütleinin büyük olması sebebiyle çok daha küçük olduğu görülmektedir.

$$E_{kin} \approx cp = 46 \text{ MeV} \quad (5.14)$$

### 5.3. Zayıf Odaklama

Sabit yarıçapta kararlı parçacık yörüngesi için Wideroe  $\frac{1}{2}$  koşulu gereklidir. Bununla birlikte parçacıkları hızlandırma işleminin devamı için yeterli değildir. Küçük bir dikey sapmayla hareketine başlayan bir parçacık, hızlandırma işlemi boyunca sürekli spiral bir yol izleyerek sonunda vakum odasının duvarlarına çarparak kaybolabilir.

Demet odaklaması o dönemde gelecek parçacık hızlandırma tasarımları için temel bir gereksinim olmuştur. Demet kararlılığı ve odaklaması üzerine ilk teoriler **Walton** ve daha sonra da zayıf odaklama için kararlılık koşulunu ortaya koyan ve ilk kez uygulayan **Steenbeck** tarafından sürdürülmüştür. Bir betatrandaki odaklama sorunları **Kerst** ve **Serber** tarafından ayrıntılı yörünge analizlerinde çözülmüştür.

Kararlılık koşulu türetilirken Eşitlik 5.3' ün sadece R yarıçaplı ideal yörünge için doğru olduğu göz önünde bulundurulmalıdır, r yarıçaplı herhangi bir yörünge için geri çağırıcı kuvvet;

$$F_x = \frac{\gamma m \vartheta^2}{r} - \frac{e}{c} \vartheta B_y \quad (5.15)$$

şeklinde olmalıdır.

Düzgün bir manyetik alan içinde herhangi bir yörünge için geri çağırıcı kuvvet sıfır olacaktır. Odaklamayı dikkate almak için, yörünge üzerindeki manyetik alanın bir gradyen içerdiği varsayılır. Bu durumda, kılavuz manyetik alan;

$$B_y = B_{0y} + \frac{\partial B_y}{\partial x} x = B_{0y} \left( 1 + \frac{R}{B_{0y}} \frac{\partial B_y}{\partial x} \frac{x}{R} \right) \quad (5.16)$$

şeklinde tanımlanabilir. İdeal yörüngeden  $x$  kadar küçük bir sapma için,  $r = R + x = R(1 + x/R)$  yazılabilir.

Eşitlik 5.16, Eşitlik 5.15 içerisinde kullanıldığında geri çağırıcı kuvvet için elde edilen ifade;

$$F_x \approx \frac{\gamma m \vartheta^2}{R} \left( 1 - \frac{x}{R} \right) - \frac{e}{c} \vartheta B_{0y} \left( 1 - n \frac{x}{R} \right) \quad (5.17)$$

olur. Burada  $x \ll R$  varsayımı yapılır ve  $n$  alan indeksi olarak tanımlanırsa;

$$n = - \frac{R}{B_{0y}} \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (5.18)$$

Eşitlik 5.3 ile yatay geri çağırıcı kuvvet için,

$$F_x = - \frac{\gamma m \vartheta^2}{R} \frac{x}{R} (1 - n) \quad (5.19)$$

olarak bulunur.  $F_x = \gamma m \ddot{x}$  saptırıcı veya yatay geri çağırıcı kuvvet etkisi altındaki hareket denklemi,  $\omega_x$  frekanslı harmonik salınıcı denklemdir.

$$\ddot{x} + \omega_x^2 x = 0 \quad (5.20)$$

$$\omega_x = \frac{\vartheta}{R} \sqrt{1 - n} = \omega_0 \sqrt{1 - n} \quad (5.21)$$

Burada  $\omega_0$  yörünge dolanım frekansıdır. Parçacık ideal ya da referans bir yörüngede  $x(s)$  genlikli  $\omega_x$  frekanslı bir salınım gerçekleştirir. Bu odaklama özelliği betatronun gelişimi ile paralel olarak keşfedildiğinden parçacıkların bu hareketine  $\omega$  betatron frekanslı **betatron salınımları** denir. Eşitlik 5.21' den bir kararlılık şartı geliştirilebilir.



Buna göre betatron salınımlarının genliğinin üstel olarak büyümemesi için alan indeksinin birden küçük bir değer olması gerekmektedir.

$$n < 1 \quad (5.22)$$

Parçacık demeti kararlılığı tartışması ancak düşey düzlemdeki kararlık ta analiz edilerek tamamlanabilir. Düşey yönde çağırıcı kuvvet yatay yönde sonlu bir manyetik alan bileşeni ile sağlanabilir.

$$\gamma m \ddot{y} = \frac{e}{c} \vartheta B_x \quad (5.23)$$

Maxwell'in rotasyon eşitliği  $\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$  sonucunu verdiği için, yatay alan bileşeni

$$B_x = \int \frac{\partial B_x}{\partial y} dy = - \int n \frac{B_{0y}}{R} dy = -n \frac{B_{0y}}{R} y \quad (5.24)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eşitlik 5.23 ve 5.24, eşitlik 5.3 ile kullanılarak, düşey düzlemde hareket denklemleri türetilebilir.

$$\ddot{y} + \omega_y^2 y = 0 \quad (5.25)$$

Parçacıklar yatay düzlemin orta noktası çevresinde düşey betatron frekansı ile salınım gerçekleştirirler. Bu betatron frekansı, alan indeksi pozitif olduğu sürece,

$$\omega_y = \omega_0 \sqrt{n} \quad (5.26)$$

şeklindedir ve buradan şu koşul ortaya konulur:

$$n > 0 \quad (5.27)$$

Özetle; kılavuz manyetik alanın yatay ve düşey yönlerde birinci dereceden alan gradyanına sahip olması zayıf odaklamayı ve dolayısıyla yatay ve düşey düzlemlerde

demet kararlılığını sağlamaktadır. Demet fiziğinde kararlılık kriteri “**Steenbeck Kararlılık Kriteri**” olarak bilinir ve

$$0 < n < 1 \quad (5.28)$$

şeklinde ifade edilir.

#### 5.4. Adyabatik Sönüm

Enine odaklama tartışılırken ivmelenmenin kararlılığa etkisi göz önünde bulundurulmamıştı. Bu etki düşey yöndeki hareket için ele alınabilir. Düşey yöndeki hareket denklemi

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{y}) = \frac{e}{c} \vartheta_s B_x \quad (5.29)$$

şeklinde yazılabilir. Burada kullanılan alan  $\vec{B} = (B_x, B_y, 0)$  bileşenlerine sahiptir.

Eşitlik 5.29  $c^2$  ile çarpılıp türevi alınırsa;

$$\gamma m c^2 \ddot{y} + \dot{\gamma} m c^2 \dot{y} = e c \omega_0 R B_x(R) \quad (5.31)$$

elde edilir. Bu denklem, sönümlü harmonik salınıcının hareket denklemi olduğu için çözümlü;  $y = y_0 e^{-\alpha_y t} \cos \omega t$  formundadır. Burada  $\omega = \omega_0 \sqrt{n}$  şeklindedir ve  $\alpha$  sönüm sabitidir.

$$\alpha_y = \frac{1}{2} \frac{\dot{E}}{E} \quad (5.32)$$

Teknik olarak olanaklı bir hızlandırma için sönüm zamanı  $\tau_y = \alpha_y^{-1}$ , salınım periyoduna göre çok küçüktür. Bu sebeple anlık olarak sönüm sabit alınabilir. Bu tarz bir sönüme

**adyabatik sönüm** denir. Salınım zarfı  $y_{max} = y_0 e^{-\alpha y t}$ , eşitlik 5.33' teki gibi sönüm göstermektedir.

$$dy_{max} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{E}}{E} y_{max} dt \quad (5.33)$$

$$\frac{y_{max}}{y_{0,max}} = \sqrt{\frac{E_0}{E}} \quad (5.34)$$

Betatron salınım genliği parçacık enerjisi arttıkça azalmaktadır.  $y'$  eğimi de adyabatik sönümden aynı şekilde etkilenecektir. Buna göre daha sonra tanımlanacak olan ve demetin faz uzayındaki yayılımını ifade eden emittans kavramının bu durumdan etkilenişi ilgi çekicidir. Emittans, enine salınımlara dayalı olarak demetin  $u, u'$  konum-eğim faz uzayında kapladığı alan olarak tanımlanır ve  $\varepsilon_u = u_{max} u'_{max}$  şeklinde tanımlanır.  $u, x$  veya  $y$  olmak üzere  $(x, x')$  ve  $(y, y')$  konum-eğim düzlemlerindeki emittans (yayınım) değerleri sırasıyla  $\varepsilon_x = x.x'$  ve  $\varepsilon_y = y.y'$  olarak verilmektedir.

Adyabatik sönümden dolayı emittans enerji ile ters orantılı olacaktır. Bu sonuç hızlandırıcı fiziği açısından çok önemlidir ve özellikle rölativistik enerjilerde çok düşük emittans değerlerine zorlanmadan ulaşılabileceği bilgisini de vermektedir.

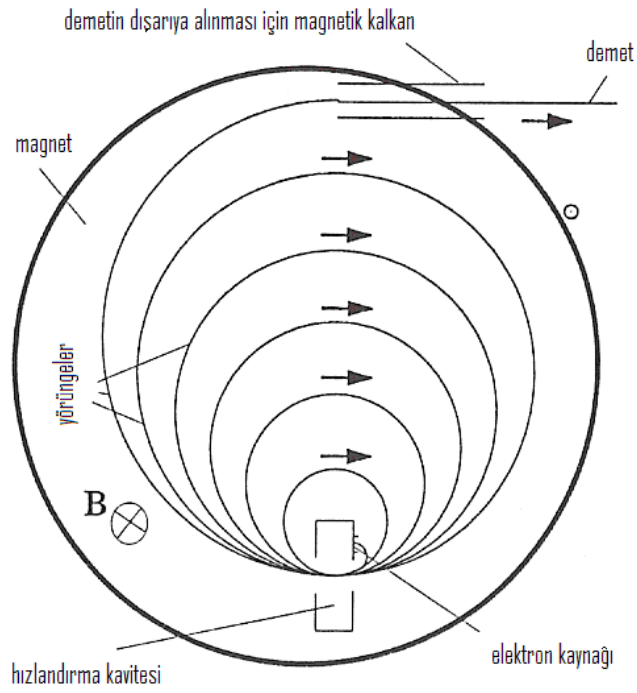
## 5.5. RF Dairesel Hızlandırıcı Tipleri

Dairesel parçacık hızlandırıcılarında hızlandırma için RF elektrik alanları kullanılmaktadır. Parçacıklar periyodik olarak etkileştikleri bu salınımlı elektrik alanı uygun fazda yakalamak koşuluyla pozitif enerji kazanmaktadır. Kavite alanları salınımlı olduğundan etkin hızlandırma için parçacık, alanın salınım periyodunun sadece pozitif yarısı ile etkileşmelidir. Bunun için parçacık ile alan arasında yukarıda vurgulandığı gibi bir eşzamanlılığın sağlanması gerekir.

Bu kesimde hızlandırma sürecinde RF alanları kullanan dairesel hızlandırıcıların değişik tipleri incelenmiştir.

### 5.5.1. Mikrotron

Mikrotronun şematik görünümü Şekil 5.4' te verilmiştir. Parçacıklar bir kaynaktan çıkarak kaviteden geçer. Daha sonra bir düzgün manyetik alan içinde onları tekrar kaviteye yönlendiren dairesel hareket yaparlar. Hızlandırma işleminin her seferinde yöründe yarıçapı magnetin sınırlarına ulaşana kadar artar.



Şekil 5.4. Mikrotronun şematik görünümü

Yörüngenin eğrilik yarıçapı Lorentz kuvvet eşitliğinden türetilebilir.

$$\frac{1}{r} = \frac{eB}{cp} = \frac{eB}{mc^2\gamma\beta} \quad (5.35)$$

Parçacıklar için dolanım süresi,

$$\tau = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m c \gamma}{e B} \quad (5.36)$$

şeklinde hesaplanır.

Rölativistik olmayan parçacıklar için,  $\gamma \approx 1$ , parçacıkların dolanım zamanı, momentumdaki artışa rağmen sabit kalmaktadır. Parçacıklar rölativistik enerjilere ulaşırken, eşzamanlılık da bozulmaktadır. Hızlandırmada sürekliliği korumak için bazı özel şartlar sağlanmalıdır.

Kaviteden n. geçişini yapan bir parçacığın hızlandırmadan dolayı enerjisi artar. ( n+1 ). tur ve n. tur için dolanım süreleri karşılaştırıldığında fark enerjideki değişim  $\Delta\gamma$  ile orantılıdır. Dolanım zamanındaki artış RF frekansın periyodunun tam katı olmalıdır. Mikrotronu fonksiyonel hale getirmek için ulaşılmaması gereken enerjiler aşağıdaki gibidir.

elektronlar için;

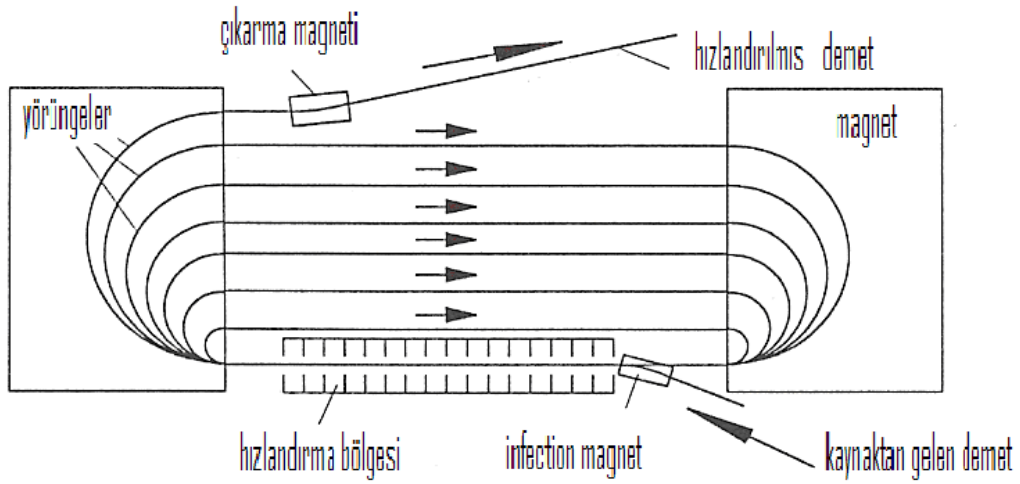
$$\Delta E_e = 511 \text{ keV}$$

protonlar için;

$$\Delta E_p = 938 \text{ MeV} \quad (5.37)$$

Elektronlar için bu şartı sağlamak mümkün olsa da protonlar için bir kavite içinde yaklaşık 1 GeV' ye ulaşmak teknik olarak imkansızdır. Bu sebeple mikrotron prensibi, özel olarak elektronların hızlandırılmasında çok daha uygundur. Temel olarak tek magnetli mikrotronlarla elektronlar için 25-30 MeV'lik enerjilere ulaşılmıştır.

Eşzamanlılık şartı kontrolünü geliştirirken aynı zamanda teknik ve ekonomik sınırlamaları da azaltmak için yarış yolu tipi mikrotron (race track microtron) geliştirilmiştir.



Şekil 5.5. Yarış yolu mikrotronunun şematik görünümü