2.2 Bazı özel fonksiyonlar

Kuvvet fonksiyonu, polinomlar ve rasyonel fonksiyonlar, mutlak değer ve tam değer fonksiyonları, pratik grafik çizimleri.

1-) Lineer fonksiyonlar: m ve n sabit sayılar olmak üzere $f(x) = mx + n$ biçimindeki bir fonksiyona lineer fonksiyon denir. $n = 0$ için $f(x) = mx$ orijinden geçen doğruları göstermektedir. $m = 1$ ve $n = 0$ için $f(x) = x$ fonksiyonuna birim fonksiyon denir. $m = 0$ olması durumunda sabit fonksiyon ortaya çıkar. (Grafikleri ile ilgili bilgiler verilebilir)

2-) Kuvvet fonksiyonları: a bir sabit sayı olmak üzere $f(x) = x^a$ biçimindeki fonksiyonlara kuvvet fonksiyonları denir. Kuvvet fonksiyonlarının bazı özel durumları şu şekildedir.

i) $a = n$, n bir pozitif tam sayı. $f(x) = x^n$ fonksiyonunun $n = 1, 2, 3, 4, 5$ için grafikleri çizilebilir.

ii) $a = \frac{1}{n}$, n bir pozitif tam sayı. $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ fonksiyonuna kök fonksiyonu denir. ($n = 2, 3$ için garfikler çizilebilir)

iii) $a = -1$ ve $a = -2$ durumları için kuvvet fonksiyonunun grafikleri hakkında bilgi verilebilir.

3-) Polinomlar: n negatif olmayan bir tam sayı ve $a_0, a_1, \cdots a_n$ reel sayılar olmak üzere

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

şeklindeki fonksiyonlara polinom adı verilir. Bütün polinomlar $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlıdır. $a_0, a_1, \cdots a_n$ ye polinomun kat sayıları, $a_n \neq 0$ ise n ye polinomun derecesi denir. (Bir kaç örnek verilebilir). Derecesi 1 olan polinom $P(x) = mx+n$ tipinde olacağından bir lineer fonksiyondur. Derecesi 2 olan polinom $P(x) = ax^2+bx+c$ biçimindedir ve kuadratik fonksiyon (ikinci dereceden polinom) adını taşır. İkinci dereceden polinomların grafikleri parabol olur. (Grafikleri hakkında bilgi verilebilir) Derecesi 3 olan polinom $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ biçimindedir ve kübik fonksiyon adını alır.

4-) Rasyonel fonksiyonlar: P ve Q gibi iki fonksiyonun oranı olarak ifade edilebilen

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

biçimindeki fonksiyonlara rasyonel fonksiyon adı verilir. Tanım kümesi $Q(x) \neq 0$ olan tüm x reel sayılarının kümesidir. (Bir kaç örnek verilebilir).

5-) Cebirsel fonksiyonlar: Polinomlardan cebirsel işlemlerle elde edilebilen (toplama, çıkarma, çarpma, bilme, kök alma) fonksiyonlara cebirsel fonksiyon denir. Örneğin $f(x) = \frac{x^2+1}{x} - \sqrt[3]{x-1}$ bir cebirsel fonksiyondur. Rasyonel fonksiyonlar cebirsel fonksiyonlardır.

6-) Transandant fonksiyonlar: Bunlar cebirsel olmayan fonksiyonlardır. Trigonometrik fonksiyonlar, ters trigonometrik fonksiyonlar, üstel ve logaritmik fonksiyonlar bu sınıftadır. Bu sınıftaki bazı özel fonksiyonlar hakkında detaylı bilgileri ileride göreceğiz.

7-) Mutlak değer fonksiyonu: f bir fonksiyon olmak üzere

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & , \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & , \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $|f|$ fonksiyonuna f nin mutlak değer fonksiyonu denir. (Mutlak değer fonksiyonunun garfiği hakkında bilgi verilebilir).

8-) Tam değer fonksiyonu: $f(x) = \|x\|$ şeklinde tanımlanan fonksiyona tam değer fonksiyonu adı verilir. ($[-2, 2]$ aralığında $f(x) = \|x\|$, $g(x) = x - \|x\|$, $h(x) = \left\|x^2\right\|$ fonksiyonlarının grafikleri çizilebilir)

2.3 Fonksiyonların dönüşümleri ve pratik grafik çizimleri

Bir fonksiyonun grafiğine dönüşümler uygulayarak yeni fonksiyonlar elde edebiliriz. Bu bize bir çok fonksiyonun grafiğini hızlı biçimde çizebilme yeteneği sağlar. Şimdi $c > 0$ olsun.

$y = f(x) + c$ nin grafiğini çizebilmek için $y = f(x)$ in grafiği c kadar yukarı,

$y = f(x) - c$ nin grafiğini çizebilmek için $y = f(x)$ in grafiği c kadar aşağı,

$y = f(x - c)$ nin grafiğini çizebilmek için $y = f(x)$ in grafiği c kadar sağa,

$y = f(x + c)$ nin grafiğini çizebilmek için $y = f(x)$ in grafiği c kadar sola kaydırılır. Yine

$y = cf(x)$ in grafiğini çizebilmek için $y = f(x)$ in grafiği düşey olarak c kadar gerilir.

$y = f(cx)$ in grafiğini çizebilmek için $y = f(x)$ in grafiği yatay olarak c kadar gerilir.

$y = -f(x)$ in grafiğini çizebilmek için $y = f(x)$ in grafiğinin x-eksenine göre yansıması alınır.

$y = f(-x)$ in grafiğini çizebilmek için $y = f(x)$ in grafiğinin y-eksenine göre yansıması alınır.

Örnek 18 *$y = \sqrt{x}$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak, $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x - 2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $y = \sqrt{-x}$ fonksiyonlarının grafiğini çiziniz.*

Örnek 19 *$y = x^2$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $y = x^2 + 6x + 10$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.*

Örnek 20 *$y = x^2$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $y = (x - 4)^2$, $y = x^2 + 3$, $y = \frac{x^2}{3}$, $y = -(x + 4)^2$ fonksiyonlarının grafiğini çiziniz.*

Örnek 21 *$y = 1 + \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x + 2}$, $y = \frac{1}{x-3}$, $y = 2 - \sqrt{x + 1}$ fonksiyonlarının grafiğini çiziniz.*

$y = |f(x)|$ in grafiği çizebilmek için önce $y = f(x)$ in grafiği çizilir Daha sonra x-ekseninin altında kalan parçanın x-eksenine göre simetriği alınır.

$y = f(|x|)$ in grafiği çizebilmek için önce $y = f(x)$ in $x \geq 0$ için grafiği çizilir. Bu eğrinin y-eksenine göre simetriği alınır.

$y = |f(|x|)|$ in grafiği çizebilmek için yukarıdaki iki işlem gerçekleştirilir.

Örnek 22 *$f(x) = \left|x^2 - 3x - 4\right|$, $g(x) = x^2 - 4\left|x\right|$, $h(x) = \left|x^2 - 2\left|x\right|\right|$, $k(x) = \sqrt{|x|}$ fonksiyonlarının grafiğini çiziniz.*

Örnek 23 *Aşağıdaki fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.*

1. *$f(x) = \sqrt{x-2}$ (Tanım kümesi $[2, \infty)$ dur. Görüntü kümesinin ise $[0, \infty)$ olduğu açıktır.)*

2. *$f(x) = x^2 - 4x + 5$ (Tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir. Görüntü kümesini bulmak için $f(x) = (x-2)^2 + 1$ yazalım. Buradan görüntü kümesinin $[1, \infty)$ olduğu görülmektedir. Diğer bir yol ise $x^2 - 4x + 5 = y$ ifadesinde x reel iken y reel sayılarının kümesini bulmaktır. Buradan $x^2 - 4x + 5 - y = 0$ ise $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4y-4}}{2}$ olup $y \geq 1$ olmalıdır.)*

3. *$f(x) = x^3 - 1$ (Tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir. Görüntü kümesini bulmak $x^3 - 1 = y$ ifadesinde x reel iken y reel sayılarının kümesini bulalım. Buradan $x = \sqrt[3]{y+1}$ olup $y \in \mathbb{R}$ dir.)*

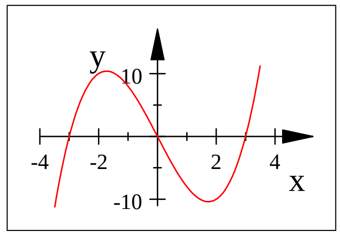
4. *$f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x+1}}$ (Tanım kümesi $(-1, 3]$ dür. Görüntü kümesini bulmak $\sqrt{\frac{3-x}{x+1}} = y$ ifadesinde $x \in (-1, 3]$ iken y reel sayılarının kümesini bulalım. Öncelikle y nin negatif olamayacağı açıktır. Diğer taraftan $3 - x = y^2 x + y^2$ ise $x = \frac{3-y^2}{y^2+1}$ olup $y \in \mathbb{R}$ olur. Böylece verilen fonksiyonun görüntü kümesi $[0, \infty)$ dur.)*

5. *$f(x) = \frac{x^2-3x+4}{x^2-3x+2}$ (Tanım kümesi $\mathbb{R} \backslash \{1, 2\}$ dir. Görüntü kümesini bulmak $\frac{x^2-3x+4}{x^2-3x+2} = y$ ifadesinde $x \in \mathbb{R} \backslash \{1, 2\}$ iken y reel sayılarının kümesini bulalım. Buradan $x^2 - 3x + 4 = y(x^2 - 3x + 2)$ ise $(1-y)x^2 + (3y - 3)x + 4 - 2y = 0$ olup $x_{1,2} = \frac{3-3y \pm \sqrt{y^2+6y-7}}{2(1-y)}$ bulunur. Buradan $y \neq 1$ ve $y^2 + 6y - 7 \geq 0$ olması gerektiği ve dolayısıyla $y \in (-\infty, -7] \cup (1, \infty)$ olduğu bulunur.)*

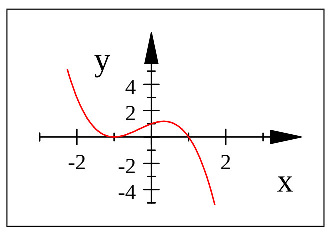
Uyarı 24 *$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ tipinde n. dereceden polinomun grafiği için aşağıdaki bilgiler kullanılabilir. Böyle bir polinomun grafiği uçlarda (x in büyük ve küçük değerleri için) $y = a_n x^n$ nin grafiğine benzerdir. Buna göre n nin çift olması halinde $a_n > 0$ ise uçlardaki kollar yukarı, $a_n < 0$ ise aşağı doğrudur. n nin tek olması halinde $a_n > 0$ ise sağ taraftaki kol yukarı sol taraftaki kol aşağı, $a_n < 0$ ise durum tam tersidir. Uçlardaki bu davranışı belirledikten sonra polinomun arada nasıl davrandığını öğrenmek için polinomun sıfır yerlerinden yararlanabiliriz. Bilindiği gibi bir x_0 reel sayısının n. dereceden bir polinomun sıfır yeri (kök) olması için gerek ve yeter şart $(x - x_0)$ ın bu polinomun bir çarpanı olmasıdır. Yani $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ olmasıdır. Eğer $(x - x_0)^m$ P nin bir çarpanı ise x_0 a katlı kök denir. m nin tek olması halinde P nin grafiği x-eksenini $(x_0, 0)$ noktasında kesip geçer. Tek olan m nin derecesi arttıkça grafik kesim noktasında yassılaşır. Eğer m nin derecesi çift ise grafik $(x_0, 0)$ noktasında x-eksenine teğettir. (Polinomun tek veya çift olup olmadığı bilgiside ihtiyaç olduğunda kullanılabilir)*

Örnek 25 *Aşağıdaki fonksiyonların grafiğini çiziniz.*

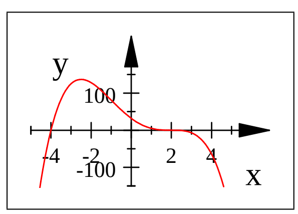
1. $f(x) = x^3 - 9x$ *(Uçlarda* $y = x^3$ *ün grafiğine benzer,* f *nin sıfırları* 0, -3 *ve* 3 *dür. Bu noktalar için* $m = 1$ *olduğundan bu noktalarda grafik* x*-eksenin kesip geçer.* f *nin tek fonksiyon olduğuna da dikkat ediniz)*



2. $g(x) = (1-x)(x+1)^2$ *(Uçlarda* $y = -x^3$ *ün grafiğine benzer.* f *nin sıfırları* 1 *ve* -1 *dir.* -1 *çift katlı kökdür.)*



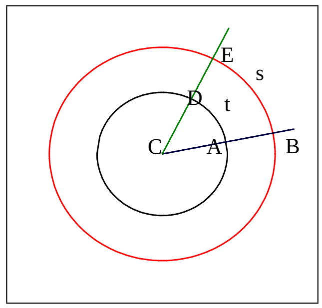
3. $h(x) = -(x+4)(x-2)^3$ *(Uçlarda* $y = -x^4$ *ün grafiğine benzer.* f *nin sıfırları* -4 *ve* 2 *dir. Bu noktalar tek katlı kök olduğundan eğri bu noktalarda* x*-eksenin kesip geçer. Fakat* -4 *noktası için* $m = 1$ *ve* 2 *noktası için* $m = 3$ *olduğundan* -4 *noktasındaki kesim daha diktir)*



2.4 Trigonometrik Fonksiyonlar

Bu bölümde radyan ölçüsünü ve temel trigonometrik fonksiyonları ele alacağız. Bilindiği gibi açılar derece veya radyan olarak ölçülür. 1 derece bir çemberin merkez açısının tamamının ölçüsünün 360 da biridir. Diğer taraftan birim çemberde bir merkez açıya karşılık gelen yayın uzunluğuna o açının radyan olarak ölçüsü denir. Yarı çapı 1 birim olan çemberin çevresi 2π birimdir. Merkez açının tamamının ölçüsü 360° olduğundan 2π radyan= 360 derecedir. Buna göre derece cinsinden verilen tüm açıları radyan cinsinden yazabiliriz. Örneğin $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ radyan, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ radyan ve $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ radyandır.

Şimdi aynı merkezli birim çember ile r yarıçaplı çember çizelim. Daire dilimlerinin benzerliğinden



$$\frac{t}{|CA|} = \frac{s}{|CB|} \Rightarrow s = rt$$

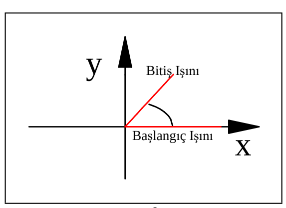
bulunur.

Örnek 26 *Yarıçapı 6 birim olan bir çemberde bir merkez açıya karşılık gelen yayın uzunluğu 2π birim ise merkez açının ölçüsü kaç radyandır.*

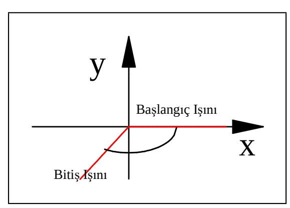
$$s = rt \Rightarrow 2\pi = 6t \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$$

bulunur.

Bir açının köşesi xy-düzleminde orijinde ise ve başlangıç ışını x-ekseni üzerinde bulunuyorsa bu açının standart konumda olduğu söylenir. x-ekseninden saat yönünün tersine ölçülen açılar pozitif ölçüde, saat yönünde ölçülen açılar negatif ölçüdedir.

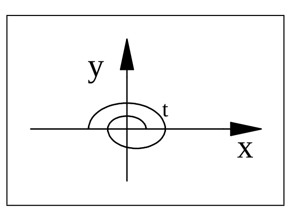


Pozitif açı



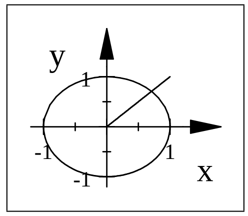
Negatif açı

Açılar birden fazla dönüm yaparakta elde edilebilir.



$t = 3\pi$

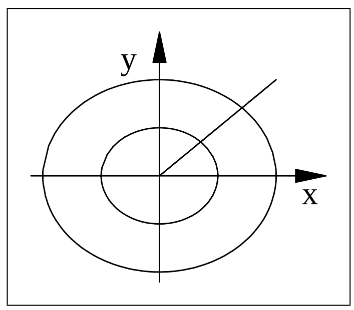
Şimdi merkezi orijinde ve yarıçapı 1 birim olan çember çizelim.Yine bir kenarı OH olan ve ölçüsü θ olan açıyı çizelim. Bu durumda çember üzerinde bir P noktası elde edilir.



P noktasının apsisi $\cos\theta$, ordinatı $\sin\theta$ olarak tanımlanır. Böylece her bir θ açısına karşılık bir $\cos\theta$ (kosinüs) ve $\sin\theta$ (sinüs) bulunur. Şekildende anlaşılacağı üzere

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1 \text{ ve } -1 \leq \cos\theta \leq 1$$

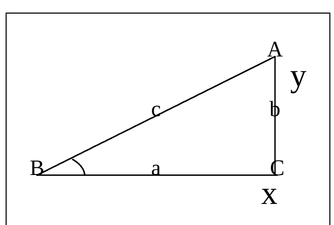
dir. Şimdi de merkezleri orijinde olan birim çember ile yarıçapı r olan bir çember çizelim.



θ ölçülü standart bir açının çemberleri kestiği noktalar P ve Q olsun. $\sin\theta = |AP|$ ve $\cos\theta = |OA|$ dır. Üçgenlerin benzerliğinden

$$\frac{|AP|}{|OP|} = \frac{|BQ|}{|OQ|} \Rightarrow \sin\theta = \frac{|BQ|}{r}$$

bulunur. Benzer şekilde $\cos\theta = \frac{|OB|}{r}$ elde edilir. Buna göre bir dik üçgende



$\sin\theta = \frac{b}{c}$ ve $\cos\theta = \frac{a}{c}$

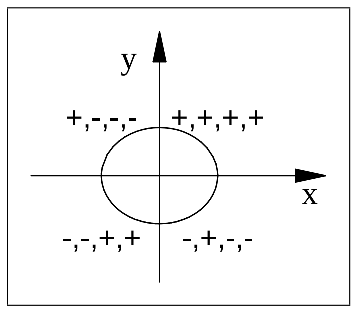
olur. Sinüs ve Kosinüs ten başka en çok kullanılan diğer dört oran tanjant (tan), kotanjant (cot), sekant (sec) ve kosekant (csc) tır. Bunlar şu şekilde tanımlanır.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\ \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}.$$

Bunların tanımlı olması için paydanın sıfırdan farklı olması gerekir. Bazı özel açıların trigonometrik oranları aşağıdadır. Bunlar uygun üçgenler çizilerek hesaplanabilir.

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \\
\sin\frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},\ \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3},\ \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
\sin\frac{\pi}{4} &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4},\ \tan\frac{\pi}{4} = 1 = \cot\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Birim çember üzerinde bir noktanın apsis ve ordinatının işareti göz önüne alınarak trigonometrik oranların işareti bulunabilir.



$\sin, \cos, \tan, \cot$

Örnek 27 $\cos\frac{2\pi}{3}$ *ve* $\sin\frac{2\pi}{3}$ *ifadelerini hesaplayınız.* $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Her bir x yay uzunluğuna bir $\sin x$ ve bir $\cos x$ karşılık geldiğinden $f(x) = \sin x$ ve $g(x) = \cos x$ fonksiyonlarına ve bunlar yardımıyla elde edilen $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ ve $\csc x$ fonksiyonlarına trigonometrik fonksiyonlar denir.

2.4.1 Trigonometrik Özdeşlikler

Birim çember üzerindedeki bir $P(x, y)$ noktası için $x^2 + y^2 = 1$ denkleminin sağlandığını biliyoruz. Buna göre OP ışınının x-ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı θ olmak üzere $x = \cos\theta$ ve $y = \sin\theta$ olduğundan

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{1}$$

denklemi bulunur.

$(x, -y)$ noktası (x, y) noktasının y-eksenine göre simetriği olduğundan

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \text{ ve } \sin(-\theta) = -\sin\theta \tag{2}$$

eşitlikleri de sağlanır. Buradan kosinüsün çift, sinüsün tek fonksiyon oldukları ve yine tanjantın ve kotanjantın da tek fonksiyon oldukları anlaşılmaktadır. Ayrıca birim çember üzerindedeki bir $P(x, y)$ noktasının konumu dikkate alındığında

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta \text{ ve } \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta \tag{3}$$

olduklarıda görülmektedir.

İki yayın farkının kosinüsü:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad (4)$$

eşitliği ile hesaplanabilir. (Bu eşitliğin ispatı ödev olarak bırakılabilir. Bölmün sonunda verilen ek sorular arasında ispatı yapılacaktır).

Diğer bütün trigonometrik özdeşlikler (1), (2), (3) ve (4) bağıntılarından elde edilebilir. Örneğin (4) de β yerine $-\beta$ yazılarak

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

bulunur. Yine

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \cos(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta))\\ &= \cos((\frac{\pi}{2}-\alpha)+\beta)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

bulunur. Burada β yerine $-\beta$ yazılarak ta

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\ &= \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\\ &= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}\\ &= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

dır. Yine

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

olduğunu da görmek kolaydır.

Toplam formüllerinde $\alpha=\beta$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha-1\\ \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha\\ \tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Toplam ve fark formülleri taraf tarafa toplanır veya çıkarılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $\sin\alpha\sin\beta$, $\sin\alpha\cos\beta$ ve $\cos\alpha\cos\beta$ çarpımları ile ilgili bağıntılar elde edilebilir.

Örnek 28 $\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$, $\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$, $\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$, $\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$ *ifadelerini toplam ve fark formüllerini kullanarak daha sade biçimde yazabiliriz.*

Örnek 29 $\sin\frac{7\pi}{12}$ *yi* $\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})$ *şeklinde yazarak hesaplayabiliriz. Yine* $\cos\frac{11\pi}{12}$ *yi* $\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})$ *şeklinde yazarak hesaplayabiliriz.*

Örnek 30 $\cos\frac{\pi}{12}$ *ve* $\sin\frac{5\pi}{12}$ *yi hesaplayınız.*

2.4.2 Peryodiklik ve Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri

Tanım 31 $f : A \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon olsun. Her* $x \in A$ *için* $x+p$ *tanım kümesine ait iken*

$$f(x+p) = f(x)$$

olacak şekilde pozitif bir p *sayısı varsa* f *ye peryodik fonksiyon,* p *ye de* f *nin bir peryodu denir. Bu eşitliği sağlayan* p *sayılarının en küçüğü varsa buna* f *nin esas peryodu (kısaca peryot olarak kullanılacaktır) denir.*

Esas peryodu p olan bir f fonksiyonunun p birim uzunluğunda bir aralıkta grafiğinin çizilmesi halinde tüm grafiği çizilebilir. Bunun için grafiğin sağa ve sola p birim uzunluğunda kaydırılması yeterlidir.

Örnek 32 $f(x) = x - \|x\|$ *ve* $g(x) = \sqrt{x-\|x\|}$ *fonksiyonları peryodiktirler. Bunların esas peryodu* $p = 1$ *dir.* $[0,1]$ *aralığında garfik çizilip ve öteleme yapılarak tüm grafik elde edilebilir.*

Örnek 33 *Sabit fonksiyon peryodiktir fakat esas peryodu yoktur.*

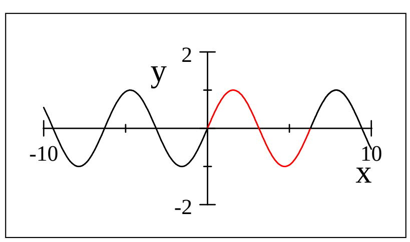
Örnek 34 $f(x) = \sin x$ *ve* $g(x) = \cos x$ *fonksiyonları peryodiktir. Bunların esas peryodu* $p = 2\pi$ *dir.*

$$\begin{aligned} f(x+p) = f(x) \quad &\Rightarrow \quad \sin(x+p) = \sin x \\ &\Rightarrow \quad \sin x \cos p + \cos x \sin p = \sin x \\ &\Rightarrow \quad \sin p = 0 \ \textit{ ve } \ \cos p = 1 \\ &\Rightarrow \quad p = 2n\pi, \ n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

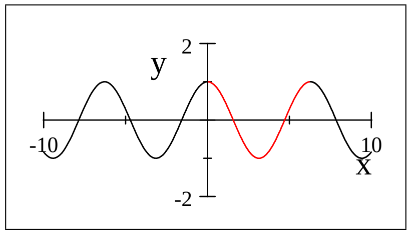
olur. O halde esas peryot $p = 2\pi$ *olur.*

Örnek 35 $h(x) = \tan x$ *ve* $k(x) = \cot x$ *fonksiyonları da peryodiktir. Bunların esas peryodu* $p = \pi$ *dir.*

$[0, 2\pi]$ aralığında x e bazı özel değerler vererek $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun bu aralıkta grafiği çizilebilir. Öteleme ile grafiğin aşağıdaki gibi olduğu görülebilir.

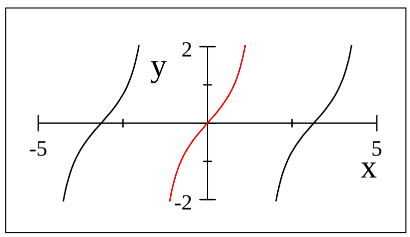


Benzer şekilde $[0, 2\pi]$ aralığında $g(x) = \cos x$ fonksiyonunun grafiği çizilip öteleme yapılırsa grafiğin



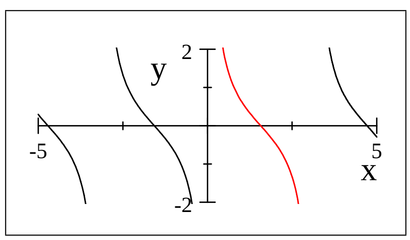
şeklinde olduğu görülebilir.

$h(x) = \tan x$ fonksiyonunun peryodu π olduğundan $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aralığında grafik çizmek yeterlidir. Bu fonksiyonun grafiği

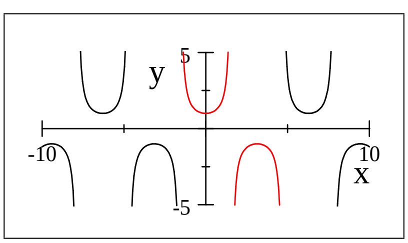


şeklindedir.

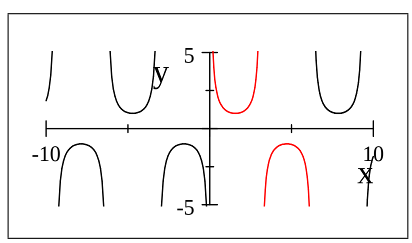
$k(x) = \cot x$ fonksiyonunun da peryodu π olduğundan $(0, \pi)$ aralığında grafik çizmek yeterlidir. Bu fonksiyonun grafiği ise



Gerekli görülmesi halinde $\sec x$ ve $\csc x$ onksiyonlarının da grafikleri verilebilir. Bunlar sırası ile



$\sec x$



$\csc x$

Örnek 36 *Pratik grafik çizimleri kullanılarak aşağıdaki fonksiyonların grafiğini çiziniz.*

1. $y = 3\sin x$
2. $y = -\frac{1}{2}\cos x$
3. $y = |\sin x|$
4. $y = \sin 4x$
5. $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$
6. $y = 1 + \sin 2x$

Örnek 37 *Aşağıdaki fonksiyonların peryodik olup olmadığını araştırınız.*

1. $y = |\sin x|$
2. $y = \sqrt{\sin x}$

Örnek 38 *Aşağıdaki fonksiyonların tek veya çift olup olmadığını araştırınız*

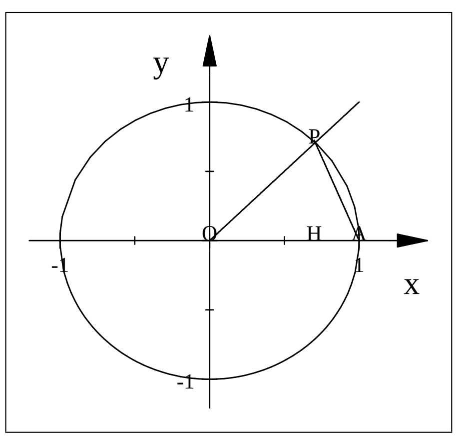
1. $f(x) = x + \sin x$
2. $g(x) = \sin^2 x + \cos x$
3. $h(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}$

Örnek 39 *Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.*

1. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
2. $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$
3. $\tan x = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$
4. $\tan 2x = \frac{2}{\cos x - \tan x}$

Örnek 40 *Aşağıdaki eşitsizliklerin doğruluğunu gösteriniz.*

1. $-|\theta| \leq \sin\theta \leq |\theta|$
2. $-|\theta| \leq 1 - \cos\theta \leq |\theta|$



Şekildeki AOP açısı θ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} |PH|^2 + |AH|^2 &= |PA|^2 \\ \sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2 &= |PA|^2 \leq \theta^2 \end{aligned}$$

olup

$$\sin^2\theta \leq \theta^2 \ \ ve \ (1-\cos\theta)^2 \leq \theta^2$$

eşitsizliklerinden istenenler görülür.