3 TÜREV

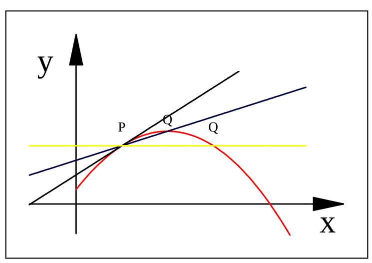
Önceki bölümde bir f fonksiyonunun bir a noktasındaki tanım değeri kadar x bağımsız değişkeni a noktasına yaklaşırken f nin davranışınında önemi vurgulanmış ve limit kavramı tanıtılmıştı. Daha sonra limit kavramından yararlanarak bir fonksiyonun sürekliliğinden bahsedilmiş ve sürekli fonksiyonların bazı özellikleri incelenmişti. Bu bölümde ise sürekli fonksiyonlar arasında önemli bir özelliğe sahip olan fonksiyonları göz önüne alacağız. Bu özelliğe fonksiyonun türevlenebilmesi diyeceğiz. Türev kavramının fen bilimlerinde ve hatta iktisatta pek çok uygulaması vardır. Örneğin matematikte teğetin eğimi, fizikte hız ve ivme, kimyada reaksiyon hızı, iktisatta marjinal gelir gibi kavramlar türev yardımıyla açıklanmaktadır.

3.1 Teğet

Bir C eğrisi $y = f(x)$ denklemi ile verilmiş olsun. C eğrisinin $P(a, f(a))$ noktasındaki teğetini bulmak için aşağıdaki yolu izleyelim. P noktasının yakınındaki $x \neq a$ şartını sağlayan bir $Q(x, f(x))$ noktasını göz önüne alırsak PQ doğrusunun eğiminin

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

olduğu görülmektedir. x değeri a ya yaklaştıkça Q noktası da eğri üzerinde P noktasına yaklaşacaktır.



Eğer m_{PQ} bir m değerine yaklaşırsa, eğrinin P notasındaki teğetini P den geçen ve eğimi m olan doğru olarak tanımlarız. Buna göre eğer limit varsa, $y = f(x)$ eğrisinin $P(a, f(a))$ noktasındaki teğet doğrusu P noktasından geçen ve eğimi

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

olan doğrudur.

Örnek 71 *$y = x^2$ parabolünün $(2, 4)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulalım. $a = 2$ ve $f(x) = x^2$ olduğundan eğim*

$$m = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

olur. O zaman teğet denklemi $y - 4 = 4(x - 2)$ den $y = 4x - 4$ olur.

Teğet doğrusunun eğimi için bazı durumlarda kullanımı daha kolay olan bir başka ifade de vardır. $x = a+h$ dersek x, a ya yaklaştıkça h, 0 a yaklaşacağından teğet doğrusunun eğimi

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

olur.

Örnek 72 *$y = \frac{1}{x}$ eğrisinin $a = 2$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemini bulalım. $a = 2$ ve $f(x) = \frac{1}{x}$ olduğundan $f(a) = \frac{1}{2}$ olur. O zaman eğim*

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}$$

olur. Böylece teğet denklemi $y = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2}$ den $y = -\frac{x}{4} + 1$ olur.

Yukarıdakine benzer şekilde konum fonksiyonu $s = f(t)$ olan bir cismin $t = a$ anındaki hızının

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

olduğu belirtilmektedir. Bunlarda olduğu gibi hernahgi bir bilim dalında

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

biçimindeki limitler sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle bu limitler için özel bir isim ve gösterim kullanılmaktadır.

Tanım 73 *Eğer varsa, aşağıdaki limite, f fonksiyonunun a noktasındaki türevi denir ve $f'(a)$ ile gösterilir.*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Yukarıda teğet doğrularını bulurken gördüğümüz gibi, türevin tanımını ifade etmenin eşdeğer bir yolu

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

dır.

Örnek 74 *$f(x) = x^3 + 1$ fonksiyonunun a noktasındaki türevini hesaplayalım;*

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} = 3a^2 \end{aligned}$$

olur.

Yukarıdaki açıklamalara göre $y = f(x)$ eğrisinin $P(a, f(a))$ noktasındaki teğet doğrusu, türevin var olması halinde

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

eşitliği ile verilir.

Örnek 75 *$y = f(x)$ eğrisinin $(4, 3)$ noktasındaki teğet doğrusu $(0, 2)$ noktasından geçtiğine göre $f(4)$ ve $f'(4)$ nedir?*

Örnek 76 *$f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ ve $f'(2) = -1$ şartlarını sağlayan bir f fonksiyonu grafiği çiziniz.*

Örnek 77 *$y = \sqrt{x}$ eğrisine teğet ve eğimi $\frac{1}{4}$ değerine eşit olan bir doğru denklemi bulunuz.*

Eğer

$$\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty$$

ise $y = f(x)$ sürekli eğrisinin $x = a$ noktasında bir dikey (düşey) teğeti vardır denir. Örneğin $y = x^{\frac{1}{3}}$ ve $y = x^{\frac{2}{3}}$ eğrilerinin $x = 0$ noktasında bir düşey teğeti vardır. (Grafikleri çizerek karşılaştırma yapınız.)

3.2 Fonksiyon Olarak Türev

Önceki kesimde $y = f(x)$ fonksiyonunu $x = a$ noktasındaki türevi

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

olarak verilmişti. Bu kesimde türev, f fonksiyonunun tanım aralığındaki her x değeri için fonksiyondan türetilen yeni bir fonksiyon olarak incelenecektir.

Tanım 78 *$y = f(x)$ fonksiyonunu x değişkenine bağlı türevi, limitin var olması halinde f' fonksiyonudur ve x noktasındaki değeri ise*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

olarak tanımlanır.

f' fonksiyonunun tanım kümesi $\{x : f'(x) \text{ var}\}$ olarak verilir ve f nin tanım kümesinden daha küçük olabilir.

Örnek 79 *$f(x) = \sqrt{x}$ ise f' fonksiyonunu ve tanım kümesini bulunuz.*

$y = f(x)$ fonksiyonunun türevinin bir çok gösterimi vardır. Bazı yaygın gösterimler şöyledir:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x).$$

$\frac{d}{dx}$ ve D sembolleri türev alma operatörleri olarak adlandırılır. Türevin bir $x = a$ noktasındaki değeri ise

$$f'(a) = \frac{dy}{dx}\,|_{x=a} = \frac{df}{dx}\,|_{x=a}$$

şeklinde gösterilmektedir.

Tanım 80 *Eğer $y = f(x)$ fonksiyonu için $f'(a)$ varsa f ye a da türevlenebilirdir denir. Eğer f bir açık aralığın (sonlu yada sonsuz) her noktasında türevlenebiliyorsa bu fonksiyona açık aralıkta türevlenebilirdir denir. Eğer f fonksiyonu (a, b) açık aralığında türevlenebilir ve*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \textit{(x = a noktasında sağ türev)}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \quad \textit{(x = b noktasında sol türev)}$$

limitleri varsa bu fonksiyona $[a, b]$ kapalı aralığında türevlenebilirdir denir.

Örnek 81 *$f(x) = |x|$ fonksiyonunun $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ aralıklarında türevlenebilir olduğunu fakat $x = 0$ noktasında türevlenemediğini gösteriniz.*

Teorem 82 *Eğer f fonksiyonu $x = a$ noktasında türevlenebiliyorsa bu noktada süreklidir.*

Ispat. f fonksiyonu a noktasında türevlenebiliyor ise

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

şeklinde tanımlı g fonksiyonunun a noktasında limiti vardır ve bu limit $f'(a)$ dır. Yukarıdaki eşitlikten $x \neq a$ için

$$f(x) = f(a) + (x - a)g(x)$$

yazılabilidiğinden

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} [f(a) + (x - a)g(x)] \\ &= f(a) + 0f'(a) = f(a) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla f fonksiyonu a noktasında süreklidir. ■

3.3 Türev Alma Kuralları

Bu kesimde basit fonksiyonlardan başlayarak türev almada genel kuralları elde edeceğiz.

1. **Sabit fonksiyon:** $f(x) = c$ sabit fonksiyon olmak üzere her x için

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0$$

bulunur.

2. **Kuvvet fonksiyonları (Kuvvet kuralı):** n bir pozitif tam sayı olmak üzere $f(x) = x^n$ kuvvet fonksiyonunu göz önüne alalım. O zaman her x için

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z\to x} \frac{f(z) - f(x)}{z-x} = \lim_{z\to x} \frac{z^n - x^n}{z-x} \\ &= \lim_{z\to x} \frac{(z-x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \cdots + zx^{n-2} + x^{n-1})}{z-x} \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

bulunur. Kuvvet negatif olduğunda bu fonksiyonun türevi nedir? sorusu akla gelebilir. Örneğin $f(x) = x^{-1}$ fonksiyonunun türevi $x \neq 0$ için

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z\to x} \frac{f(z) - f(x)}{z-x} = \lim_{z\to x} \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{x}}{z-x} \\ &= \lim_{z\to x} \frac{\frac{x-z}{zx}}{z-x} = -\frac{1}{x^2} = (-1)x^{-2} \end{aligned}$$

olur. Buradan kuvvet kuralının $n = -1$ içinde doğru olduğu görülmektedir. İleride (Böümün türevinden sonra) bu kuralın her negatif tam sayı için doğru olduğunu göstereceğiz. Yine kuvvetin bir rasyonel sayı olması halinde bu kural geçerli midir? sorusu da akla gelebilir. Örneğin $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ olsun. O zaman her $x > 0$ için

$$f'(x) = \lim_{z\to x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{z-x} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

olur. Yani kuvvet kuralı $n = \frac{1}{2}$ için de geçerlidir. Aslında bu kural her n reel sayıs için geçerlidir. Bunu doğruluğunu ileride (logaritmik türev almadan sonra) göreceğiz.

3. **Sabitle çarpım kuralı:** c sabit bir sayı ve f türevlenebilen bir fonksiyonsa

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

olur. Çünkü

$$\begin{aligned} [cf(x)]' &= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= c\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x) \end{aligned}$$

sağlanır.

4. **Toplam ve fark kuralı:** f ve g türevlenebilir ise

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$$

dir. $F(x) = f(x) + g(x)$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
[f(x)+g(x)]' &= F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)+g'(x)
\end{aligned}$$

olur.

Uyarı 83 *Kuvvet kuralı ile Toplam ve fark kuralı birlikte düşünülürse bütün polinomlar her yerde türevlenebilir olduğu görülebilir.*

Örnek 84 $f(x) = x^3 + \frac{1}{5}x^2 + 7x + 5$ *polinomunun türevini hesaplayınız.*

Örnek 85 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ *eğrisi üzerinde teğet doğrusunun yatay olduğu nokta var mıdır? Varsa bu noktaları bulunuz.*

5. **Çarpım kuralı:** f ve g fonksiyonları türevlenebilir ise

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = g(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x)$$

dir. $F(x) = f(x)g(x)$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
[f(x)g(x)]' &= F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= f(x)g'(x)+g(x)f'(x)
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 86 $f(x) = (4x^2-1)(7x^3+x)$ *ise* $f'(x)$ *i bulunuz.*

Örnek 87 *$g(4) = 2$ ve $g'(4) = 3$ olmak üzere $f(x) = \sqrt{x}g(x)$ ise $f'(4)$ değerini bulunuz.*

6. **Bölüm kuralı:** f ve g fonksiyonları türevlenebilir ve $g \neq 0$ ise

$$\frac{d}{dx}[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

dir. $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dersek $f(x) = F(x)g(x)$ olur. Çarpım kuralından

$$f'(x) = g(x)F'(x) + F(x)g'(x)$$

olup

$$\begin{aligned}[\frac{f(x)}{g(x)}]' &= F'(x) = \frac{f'(x) - F(x)g'(x)}{g(x)} \\ &= \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)}g'(x)}{g(x)} \\ &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 88 *$f(x) = \frac{5x^4+x^2}{x^3+2}$ ise $f'(x)$ i bulunuz.*

Örnek 89 *n herhengi bir negatif tam sayı iken $f(x) = x^n$ kuvvet fonksiyonunun türevininin $f'(x) = nx^{n-1}$ olduğunu gösteriniz. $m = -n$ diyelim. O zaman m bir pozitif tam olmak üzere $f(x) = x^n = \frac{1}{x^m}$ olur. Böylece Bölüm kuralından*

$$f'(x) = (\frac{1}{x^m})' = \frac{0x^m - mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

bulunur.

7. **Ters fonksiyonun türevi:** Bilindiği gibi $f : A \to B$ fonksiyonu birebir ve örten ise $f^{-1} : B \to A$ tersi vardır. Bu durumda eğer f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilir ve $f'(x_0) \neq 0$ ise f^{-1} fonksiyonu da $y_0 = f(x_0)$ noktasında türevlenebilirdir ve

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

dir. Gerçekten

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \\ &= \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}\end{aligned}$$

olur. (Bunun ispatı zincir kuralından sonra da verilebir. Şöyle ki f ve g birbirinin ters fonksiyonları ise $f(g(x)) = x$ olup zincir kuarlından $f'(g(x))g'(x) = 1$ olup $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ olur)

Örnek 90 *n bir pozitif tam sayı olmak üzere $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ fonksiyonu için $f'(x)$ i hesaplayınız. $f^{-1}(x) = x^n$ olduğundan $(f^{-1})'(x) = nx^{n-1}$ ve böylece $(f^{-1})'(f(x)) = n(f(x))^{n-1}$ olur. Böylece*

$$f'(x) = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

bulunur.

Örnek 91 *$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ise $f'(x)$ i bulunuz.*

8. **Zincir kuralı:** f ile g türevlenebilir fonksiyonlar ve $F = f \circ g$ olsun. O zaman F de türevlenebilirdir ve

$$F'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$$

dir. Leibnitz gösteriminde, $y = f(u)$ ve $u = g(x)$ türevlenebilir fonksiyonlarsa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

dir.

Lemma 92 *f fonksiyonu x noktasında türevlenebilir ve $y = f(x)$ olsun. O zaman*

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

eşitliğini sağlayan ve $\Delta x \to 0$ iken $\varepsilon \to 0$ olan bir ε reel sayısı vardır.

Ispat.

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - f'(x) & , \quad \Delta x \neq 0 \\ 0 & , \quad \Delta x = 0 \end{cases}$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon &= \lim_{\Delta x \to 0} [\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - f'(x)] \\ &= f'(x) - f'(x) = 0 \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan $\Delta x \neq 0$ için tanımdan

$$\varepsilon \Delta x = f(x + \Delta x) - f(x) - \Delta x f'(x)$$

olur. Ancak $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ olduğundan

$$\varepsilon \Delta x = \Delta y - \Delta x f'(x)$$

veya

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

bulunur. Yine $\Delta x = 0$ ise $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 0 = f'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x$ eşitliği sağlanır. ■

Zincir kuralının ispatı. $y = f(u)$ ve $u = g(x)$ türevlenebilir fonksiyonlar olsun. O zaman

$$\Delta u = g'(x)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x$$

eşitliğini sağlayan ve $\Delta x \to 0$ iken $\varepsilon_1 \to 0$ olan bir ε_1 reel sayısı vardır. Yine

$$\Delta y = f'(u)\Delta u + \varepsilon_2 \Delta u$$

eşitliğini sağlayan ve $\Delta u \to 0$ iken $\varepsilon_2 \to 0$ olan bir ε_2 reel sayısı vardır. Buradan

$$\begin{aligned} \Delta y &= (f'(u) + \varepsilon_2)\Delta u \\ &= (f'(u) + \varepsilon_2)(g'(x)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x) \\ &= (f'(u) + \varepsilon_2)(g'(x) + \varepsilon_1)\Delta x \end{aligned}$$

olur. $\Delta x \neq 0$ için

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (f'(u) + \varepsilon_2)(g'(x) + \varepsilon_1)$$

bulunur ki $\Delta x \to 0$ iken $\varepsilon_1 \to 0$ ve $\varepsilon_2 \to 0$ olduğundan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)g'(x)$$

yada

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)g'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

elde edilir. ■

Uyarı 93 *Şimdi Lemma 92 deki*

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

eşitliğinden

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

yazılabilir. $\Delta x \to 0$ *için* $\varepsilon \to 0$ *olduğundan* Δx *yeterince küçük alındığında*

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \tag{7}$$

elde edilir. (7) kullanılarak yaklaşık değer hesaplamaları yapılabilir.

Örnek 94 $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ *fonksiyonunun türevini hesaplayınız.* F *fonksiyonu* $f(u) = \sqrt{u}$ *ve* $g(x) = x^2 + 1$ *olmak üzere* $F = f \circ g$ *biçiminde yazılabilir. O zaman* $f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ *ve* $g'(x) = 2x$ *olduğundan*

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

bulunur.

Örnek 95 $f(x) = (x^3+1)^{100}$ *fonksiyonunun türevini bulunuz.*

Örnek 96 $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$ *fonksiyonunun türevini bulunuz.*

Örnek 97 $f(x) = (2x+1)^5(x^3-x+1)^4$ *fonksiyonunun türevini bulunuz.*

Örnek 98 *(7) ifadesini kullanılarak* $\sqrt[3]{28}$ *in yaklaşık değerini bulunuz.*

3.4 Ek Sorular

Örnek 99 *Aşağıdaki fonksiyonların eğer varsa karşılarında yazılı noktalardaki türevlerini hesaplayınız. Fonksiyonlar bu noktalarda sürekli midirler?*

1. $f(x) = |x-1|$, $a = 1$.
2. $f(x) = \|x\|$, $a = 2$.
3. $f(x) = x\,|x|$, $a = 0$.
4. $f(x) = x\,\|x\|$, $a = 0$.
5. $f(x) = \begin{cases} \|x\| & , \quad x > 0 \\ x^2 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$, $a = 0$.
6. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$, $a = 0$.
7. $f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$, $a = 0$.

Örnek 100 *Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktalardaki türevlerini hesaplayınız.*

1. $f(x) = (x^2+1)^3$, $x = 1$
2. $f(x) = (1+x^{-2})^{50}$, $x = 1$
3. $f(x) = (\frac{1+x}{1-x})^{10}$, $x = 0$
4. $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$, $x = 0$
5. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $x = \frac{1}{2}$
6. $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$, $x = 1$
7. $f(x) = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}$, $x = 0$.

Örnek 101 *$f(x) = x^3 + 4x$ fonksiyonu için $(f^{-1})'(5) =$?*

Örnek 102 *$f(0) = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 2$ ve $g(x) = (x^2+3)^4 f(x)$ olsun. $g'(0) =$?*

Örnek 103 *$g(0) = g'(0) = 0$ ve $f(x) = \begin{cases} g(x)\cos\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ olsun. $f'(0)$ değerini bulunu.*

Örnek 104 *$y = x^3 - x^2 - x + 1$ eğrisi üzerinde teğetin yatay olduğu noktaları bulunuz.*

Örnek 105 *Hangi x değerleri için $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 87$ fonksiyonunun grafiğinin yatay teğeti vardır?*

Örnek 106 *$y = 6x^3+5x-3$ eğrisinin, eğimi 4 olan bir teğet doğrusu olmadığını gösteriniz.*

Örnek 107 *$y = x^2 + 1$ eğrisinin hangi noktasındaki teğeti orijinden geçer?*

Örnek 108 *$y = x^2$ parabolünün $(0, -4)$ noktasından geçen iki teğet doğrusu olduğunu şekil çizerek gösteriniz. Bu iki teğet doğrusunun parabol ile kesiştiği noktaların koordinatlarını bulunuz.*

Örnek 109 *$(2, -3)$ noktasından geçen ve $y = x^2 + x$ parabolüne teğet olan doğruların denklemini bulunuz.*

Örnek 110 *Bir C eğrisinin P noktasındaki normal doğrusu, P den geçen ve C nin P noktasındaki teğetine dik olan doğru olarak tanımlanır. Buna göre $y = 1 - x^2$ eğrisinin $(2, -3)$ noktasındaki normal doğrusunu bulunuz.*

Örnek 111 *$y = x - x^2$ parabolünün $(1, 0)$ noktasındaki normal doğrusu, parabol ile ikinci kez nerede kesişir?*

Örnek 112 *Hangi a ve b değerleri için $2x + y = b$ doğrusu $y = ax^2$ parabolüne $x = 2$ apsisli noktada teğettir.*

Örnek 113 *Grafiğinin $(-2, 6)$ ve $(2, 0)$ noktalarındaki teğetleri yatay olan ve $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ biçiminde verilen polinomu bulunuz.*

Örnek 114 *y-ekseni üzerinde kesişen iki doğrunun, $y = x^2$ parabolüne teğet olduğu bir şekil çiziniz. Bu doğrular hangi noktada kesişir.*

Örnek 115 *(7) ifadesini kullanılarak $\sqrt{5}$ ve $\sqrt[4]{17}$ nin yaklaşık değerini hesaplayınız.*

Örnek 116 *$\frac{d}{dx} f(2x) = x^2$ ise $f'(x) =$?*

Örnek 117 *$y = x\sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$ eğrisinin hangi noktadaki teğeti ya yatay yada dikeydir.*

Örnek 118 *$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ eğrisinin $(-1,\frac{1}{2})$ noktasındaki teğetini bulunuz. Eğri ile teğeti aynı düzlemde çiziniz.*

Örnek 119 *$h(2)=4$, $h'(2)=-3$ ise $\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)|_{x=2}$=?*

Örnek 120 *$f(x)=\frac{x}{x+1}$ eğrisine teğet olan doğrulardan kaç tanesi $(1,2)$ noktasından geçer? Bu doğrular eğriye hangi noktada teğettir.*

Örnek 121 *$y=\frac{x-1}{x+1}$ eğrisinin, $x-2y=2$ doğrusuna paralel olan teğet doğrularının denklemini bulunuz.*

Örnek 122 *$y=x^2+ax+b$ ve $y=cx-x^2$ eğrileri $(1,0)$ noktasında ortak teğet doğrusuna sahiptir. a,b ve c sayılarını bulunuz.*

Örnek 123 $f(x)=\begin{cases} ax+b & , \quad x>-1 \\ bx^2-3 & , \quad x\leq -1 \end{cases}$ *fonksiyonunun her yerde türevlenebilir olması için a ve b ne olmalıdır?*

3.5 Trigonometrik ve Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

3.5.1 Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

Bu kesimde türev tanımını kullanarak sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının türevini hesplayacağız. Ardından türev alma kuralları yardımıyla diğer trigonometrik fonksiyonların türevlerini bulacağız.

1. $f(x)=\sin x$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin x &= f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h} \\
&= \sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

bulunur.

2. $f(x) = \cos x$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cos x &= f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\
&= \cos x \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

olur.

3. Bölümün türevi yardımıyla aşağıdakileri elde edebiliriz.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tan x &= (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{\cos x(\sin x)' - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x
\end{aligned}$$

Bu türevin $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ için var olduğuna dikkat edelim. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cot x &= -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x) = -\csc^2 x \\
\frac{d}{dx}\sec x &= \sec x \tan x \\
\frac{d}{dx}\csc x &= -\csc x \cot x
\end{aligned}$$

oldukları elde edilebilir.

Örnek 124 *Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.*

1. $f(x) = x^2 \tan x$
2. $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$
3. $f(x) = \frac{\tan x}{x}$
4. $f(x) = \frac{x}{\sin x + \cos x}$
5. $f(x) = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$
6. $f(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x + \cos x}$

Örnek 125 $y = x\cos x$ *eğrisinin* $(\pi, -\pi)$ *noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.*

Örnek 126 $y = \sin(\sin x)$ *eğrisinin* $(\pi, 0)$ *noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.*

Örnek 127 $y = \sec x - 2\cos x$ *eğrisinin* $(\frac{\pi}{3}, 1)$ *noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.*

Örnek 128 *Hangi* x *değeri için* $f(x) = x + 2\sin x$ *eğrisinin yatay teğeti vardır.*

Örnek 129 $y = \frac{\cos x}{2+\sin x}$ *eğrisi üzerinde teğetin yatay olduğu noktaları bulunuz.*

Örnek 130 *Zincir kuralı yardımıyla aşağıdaki fonksiyonların türevini hesaplayınız.*

1. $f(x) = \sin 3x^2$
2. $f(x) = \tan^3 x + \cos(x^2+1)$
3. $f(x) = (\tan\sqrt{x})^5$
4. $f(x) = \cos(\sin x)$
5. $f(x) = \tan(\sin x)$
6. $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$
7. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
8. $f(x) = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x$
9. $f(x) = (2 - 3\cos x)^{\frac{3}{2}}$
10. $f(x) = \sin^2(2x-1)^{\frac{3}{2}}$

Örnek 131 $\cos 62°$ *yi yaklaşık olarak hesaplayınız. (*$62° = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{90}$ *olup* $\Delta x = \frac{\pi}{90}$ *alınız)*

Örnek 132 $\cos 43°$ *ve* $\sin 32°$ *yi yaklaşık olarak hesaplayınız.*

3.5.2 Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

$f(x) = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bilindiği gibi, bu fonksiyon $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığı üzerinde tanımlı $f^{-1}(x) = \sin x$ fonksiyonunun ters fonksiyonudur. Böylce ters fonksiyonun türevi yardımıyla

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{\cos(f(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

bulunur. Burada türevin $x = 1$ ve $x = -1$ için var olmadığına dikkat edilmelidir.

Benzer şekilde

$$\begin{array}{llll}
f(x) = \arccos x & \Rightarrow & f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & x \in (-1,1) \\
f(x) = \arctan x & \Rightarrow & f'(x) = \frac{1}{1+x^2} & x \in \mathbb{R} \\
f(x) = \operatorname{arccot} x & \Rightarrow & f'(x) = \frac{-1}{1+x^2} & x \in \mathbb{R} \\
f(x) = \operatorname{arcsec} x & \Rightarrow & f'(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} & x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1] \\
f(x) = \operatorname{arccsc} x & \Rightarrow & f'(x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}} & x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]
\end{array}$$

olduğu elde edilebilir.

Örnek 133 *Zincir kuralını da dikkate alarak aşağıdaki fonksiyonların türevini hesaplayınız.*

1. $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$
2. $f(x) = x\arctan\sqrt{x}$
3. $f(x) = \tan^{-1}(x - \sqrt{1+x^2})$
4. $f(x) = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$
5. $f(x) = (1+x^2)\arctan x$
6. $f(x) = \arcsin(\tan x)$

Örnek 134 $f(x) = (x - \frac{1}{2})\arcsin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x - x^2}$ *fonksiyonu için* $f'(1) =?$