BELİRSİZ ŞEKİLLER

Payı ve paydası aynı anda sıfıra veya sonsuza yaklaşan kesirlerin limitlerinin hesaplanması için Bernoulli tarafından bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntem *L'Hospital Kuralı* olarak adlandırılır ve belirsiz şekiller adı verilen

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0.\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$$

durumlarından biri ile karşılaşıldığında limitin türev yardımıyla hesaplanmasını sağlar.

$\frac{0}{0}$ **Belirsizlik Hali**

f ve g sürekli fonksiyonları için $f(a)=g(a)=0$ ise, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ limiti $x=a$ yazılarak hesaplanamaz. Bazı durumlarda cebirsel işlemler yardımıyla sadeleştirmeler yapılarak bu tip oranların limitleri hesaplanabilir. Bu tip oranlardan limitini kolayca hesaplayabildiğimiz bir diğeri ise;

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

oranıdır ve değeri $f'(a)$ dır. L'Hospital Kuralı türev kavramını kullanarak belirsiz formları veren limitleri hesaplamamıza yardımcı olur.

Teorem ($L\prime Hospital\ Kuralı$) f ve g sürekli iki fonksiyon, $f(a)=g(a)=0$, $f'(a)$ ve $g'(a)$ mevcut ve $g'(a)\neq 0$ ise

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

dır.

Teorem f ve g sürekli iki fonksiyon, $f(a)=g(a)=0$, f ve g a noktasını içeren bir açık I aralığı üzerinde türevlenebilir ve $x\neq a$ ise I üzerinde $g'(x)\neq 0$ olsun. Bu durumda;

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

dir.

Teorem f ve g fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde türevlenebilir ise,

$$\exists c\in(a,b):\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

dır.

Uyarı L'Hospital Kuralı belirsizlik ortadan kalkıncaya kadar tekrar uygulanır.

Örnek 1. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{1+2x}=0$ dır.

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2}$ limitini hesaplayalım. L'Hospital Kuralı kullanılırsa;

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{2x}=\infty \text{ ve } \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{2x}=-\infty$$

elde edilir. Dolayısıyla limit mevcut değildir.

$\dfrac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$ ve $\infty-\infty$ Belirsizlik Hali

L'Hospital Kuralı, $\dfrac{0}{0}$ belirsizliğine uygulandığı gibi $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine de uygulanabilir. Bu durumda; x, a noktasına yaklaştığında $\lim\limits_{x\to a}f(x)\to\pm\infty$ ve $\lim\limits_{x\to a}g(x)\to\pm\infty$ ise

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

eşitliği gerçeklenir.

Örnek 2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$ limiti $\infty-\infty$ belirsizliği verir, payda eşitlenerek belirsizlik $\dfrac{0}{0}$ belirsizliğine dönüştürülür ve L'Hospital Kuralı ile limit hesaplanır.

0^0, ∞^0 ve 1^∞ Belirsizlik Hali

x sonlu bir değere veya $\pm\infty$ değerine yaklaştığında $y=[f(x)]^{g(x)}$ biçiminde tanımlı fonksiyonlar bu belirsizlik hallerinden birini verebilir. Bu durumda; logaritma fonksiyonundan faydalanılarak

$$\ln y=g(x)\ln f(x)$$

eşitliği elde edilir. Sağ taraftaki ifadenin limiti $0.\infty$ belirsizliğine sahip olur ve daha önce verilen yöntemler kullanılarak sağ taraftaki limit hesaplanabilir.

Örnek 3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$ limitini hesaplamak için logaritma fonksiyonundan faydalanılırsa

$$\ln y=\frac{1}{x}\ln(1+2x)$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+2x) &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+2x}}{1} = 2\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla; $\lim_{x\to 0} y = e^2$ dir.