3. İndirgeme (Rekürans) Bağıntıları

İntegrant bir fonksiyonun yüksek dereceden kuvvetlerini içeriyorsa, bazı fonksiyonlar için kısmi integrasyon yöntemi integrali daha küçük dereceden bir ifadenin integraline dönüştürebilir. Bu tip integaraller ve kullanılan indirgeme bağıntılarından bazılarını ifade edelim:

I. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\int \sin^n x dx$ integrali için kısmi integrasyon yöntemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}\int \sin^n x dx &= \int \sin^{n-1} x \sin x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$n \int \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx$$

olur ve eşitliğin iki tarafı n ile bölünerek

$$\int \sin^n x dx = \frac{-1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

indirgeme formülü elde edilir. Benzer şekilde; $\int \cos^n x dx$ integrali için indirgeme formülü

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

olacaktır.

II. $n \in \mathbb{N}_1$ olmak üzere $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ integrali için indirgeme formülü

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1} \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

dir. Benzer şekilde; $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ integrali için indirgeme formülü

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1} \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$

III. $m,n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $\int \sin^n x\cos^m x dx$ integrali için indirgeme formülü

$$\int \sin^n x\cos^m x dx=-\frac{1}{m+1}\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x+\frac{n-1}{m+1}\int \sin^{n-2}x\cos^m x dx$$

dir.

IV. $n\in\mathbb{N}_1$ olmak üzere $\int \tan^n x dx$ integrali için indirgeme formülü

$$\int \tan^n x dx=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-\int \tan^{n-2}x dx$$

dir.

V. $n\in\mathbb{N}_1$ olmak üzere $\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^n}$ tipindeki integraller için öncelikle $u=\frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}$ ve $dv=dx$ alınarak kısmi integrasyon yöntemi uygulanır ve

$$\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}=\frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}+(2n-2)\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}-(2n-2)\,a^2\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^n}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^n}=\frac{x}{(2n-2)\,a^2\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}+\frac{(2n-3)}{(2n-2)\,a^2}\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}$$

indirgeme formülü elde edilir.

Örnek 7. (a) $\int \cos^4 x dx$ integrali karşılık gelen indirgeme bağıntısı kullanılarak

$$\int \cos^4 x dx=\frac{1}{5}\cos^3 x\sin x+\frac{3}{4}\int \cos^3 x dx$$

biçiminde sadeleştirilir. İndirgeme formülü tekrar uygulanarak sonuç elde edilir.

(b) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ integrali karşılık gelen indirgeme bağıntısı kullanılarak

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x}=\frac{-1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x}$$

biçiminde sadeleştirilir.

4. Basit Kesirlere Ayırma Yöntemi

Payının derecesi paydasının derecesinden küçük olan $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel fonksiyonu verilsin. a, $(c_n)_{1\leq n\leq k}$, $(p_n)_{1\leq n\leq m}$ ve $(q_m)_{1\leq n\leq m}$ reel sabitler, $r_1, r_2, \ldots r_k$ ve $s_1, s_2, \ldots, s_m$ pozitif tamsayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} Q(x) &= a(x-c_1)^{r_1}(x-c_2)^{r_2}\ldots(x-c_k)^{r_k}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{s_2} \\ &\quad \ldots\left(x^2+p_mx+q_m\right)^{s_m} \end{aligned}$$

olsun. $Q(x)$ ve $P(x)$ polinomları birinci ve ikinci dereceden ortak çarpanlara sahip olmasın ve her $i = 1, 2, ..., m$ için $p_i^2 - 4q_i < 0$ olsun. Bu durumda; $R(x)$ rasyonel fonksiyonu, k tane farklı $x - c_i$ çarpanının her biri için

$$\frac{A_1}{x-c_i} + \frac{A_2}{(x-c_i)^2} + \cdots + \frac{A_{r_i}}{(x-c_i)^{r_i}}$$

biçiminde k-lı bloklar ile m tane farklı $x^2 + p_ix + q_i$ çarpanının her biri için

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+p_ix+q_i} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+p_ix+q_i)^2} + \cdots + \frac{B_{s_i}x+C_{s_i}}{(x^2+p_ix+q_i)^{s_i}}$$

biçiminde m-li blokların toplamı biçiminde ifade edilebilir. Böylece, $R(x)$ rasyonel fonksiyonu daha basit rasyonel ifadelerin toplamı şeklinde yazılarak kolayca integrali hesaplanabilir.

Örnek 8. (a) $\int \dfrac{dx}{x^2-1}$ integralini hesaplayalım. Öncelikle

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

eşitliğini sağlayan A ve B sabitleri $A = 1/2$ ve $B = -1/2$ olarak bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C \end{aligned}$$

elde edilir.

(b) $\int \dfrac{dx}{(x-1)^2(x+2)}$ integralini hesaplayalım. Öncelikle

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

eşitliğini sağlayan A, B ve C sabitleri $A = -1/9$, $B = 1/3$ ve $C = 1/9$ olarak bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+2)} &= \int \left(\frac{-1}{9(x-1)} + \frac{1}{3(x-1)^2} + \frac{1}{9(x+2)} \right) dx \\
&= \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x+2}{x-1} \right| - \frac{1}{3(x-1)} + C
\end{aligned}$$

elde edilir.

(c) $\int \dfrac{x^2 dx}{(x-1)(x^2+2)}$ integralini hesaplayalım. Öncelikle

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

eşitliğini sağlayan A, B ve C sabitleri $A = B = C = 1/2$ olarak bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 dx}{(x-1)(x^2+2)} &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+2} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \ln |x-1| + \int \frac{x}{x^2+2} dx + \int \frac{1}{x^2+2} dx \\
&= \frac{1}{2} \left(\ln |x-1| + \ln \left| x^2+1 \right| \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + C
\end{aligned}$$

elde edilir.

4. Trigonometrik İntegraller

İntegrandları trigonometrik fonksiyonların basit cebirsel kombinasyonları olan integrallere trigonometrik integraller adı verilir.

I. a ve b reel sayılar olmak üzere;

$$\int \sin ax \sin bx dx, \quad \int \cos ax \cos bx dx \text{ ve } \int \sin ax \cos bx dx$$

tipindeki integraller;

$$\begin{aligned}
\sin ax \sin bx &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(a-b\right)x - \cos\left(a+b\right)x\right] \\
\cos ax \cos bx &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(a+b\right)x + \cos\left(a-b\right)x\right] \\
\sin ax \cos bx &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(a+b\right)x + \sin\left(a-b\right)x\right]
\end{aligned}$$

trigonometrik özdeşlikleri kullanılarak hesaplanır.

II. m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

tipindeki integralleri hesaplamak için m tek ise $t = \cos x$ ve n tek ise $t = \sin x$ değişken değiştirmesi yapılır. Eğer m ve n çift ise

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \text{ ve } \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

özdeşlikleri kullanılarak kuvvetler azaltılır.

III. m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere

$$\int \tan^m x \sec^n x dx$$

tipindeki integraller m tek veya n çift olduğunda kolaylıkla hesaplanır. m tek ise $u = \sec x$, n çift ise $u = \tan x$ değişken değiştirmesi yapılır ve $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ özdeşliğinden faydalanılır. Diğer yandan;

$$\int \cot^m x \csc^n x dx$$

tipindeki integraller de m tek veya n çift olduğunda $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$ özdeşliği kullanılarak benzer şekilde kolaylıkla hesaplanır.

IV. Payı ve paydası $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının cebirsel kombinasyonu olan fonksiyonlar $R\left(\sin x, \cos x\right)$ biçiminde ifade edilsin. $R\left(-\sin x, \cos x\right) = -R\left(\sin x, \cos x\right)$ ise $t = \cos x$, $R\left(\sin x, -\cos x\right) = -R\left(\sin x, \cos x\right)$ ise $t = \sin x$ ve $R\left(-\sin x, -\cos x\right) = R\left(\sin x, \cos x\right)$ ise $t = \tan x$ veya $t = \cot x$ değişken değiştirmesi yapılarak integrand basitleştirilebilir.

Örnek 9. (a) $\int \sin 7x \cos 3x dx$ integralini hesaplamak için

$$\sin 7x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 10x + \sin 4x)$$

eşitliği kullanılır. Böylece;

$$\begin{aligned} \int \sin 7x \cos 3x dx &= \frac{1}{2}\int (\sin 10x + \sin 4x)\, dx \\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\cos 10x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) + C \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

(b) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ integralini hesaplamak için;

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cos^2 x &= \sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2} \\ \cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2} \end{aligned}$$

özdeşlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \frac{1}{4}\int (1-\cos 4x)(1+\cos 2x)\, dx \\ &= \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x - \cos 4x - \cos 4x \cos 2x)\, dx \end{aligned}$$

elde edilir ve integrand basitleştirilir.

(c) $\int \sec^4 x dx$ integralini hesaplamak için $t = \tan x$ değişken değiştirmesi yapılarak;

$$\int \sec^4 x dx = \int \left(1+t^2\right) dt$$

eşitliği elde edilir.

(d) $\int \dfrac{\sin^5 x}{\cos^2 x} dx$ integralini hesaplamak için; $t = \cos x$ değişken değiştirmesi yapılarak;

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{t^2} dt = \int \left(\frac{1}{t^2} - 2 + t^2\right) dt$$

eşitliği elde edilir.