5. İrrasyonel Fonksiyonların İntegralleri

$I.$ $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ tipindeki integralleri hesaplamak için; $b^2-4ac>0$ ve $a<0$ ise, ax^2+bx+c ifadesi k bir sabit ve $u(x)$ birinci dereceden bir polinom olmak üzere k^2-u^2 biçiminde yazılabilir. Böylece;

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{du}{\sqrt{k^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{k} + C$$

olarak hesaplanır. $a>0$ olması durumunda; ax^2+bx+c ifadesi p bir sabit ve $u(x)$ birinci dereceden bir polinom olmak üzere u^2+p veya u^2-p biçiminde yazılabilir. Böylece;

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2\mp p^2}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2\mp p^2}\right) + C$$

olarak hesaplanır.

$II.$ $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ tipindeki integralleri hesaplamak için; basit cebirsel işlemler ile integrand

$$\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{m}{2a}\frac{2ax+2a\frac{n}{m}}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{m}{2a}\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} - \left(n-\frac{mb}{2a}\right)\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

biçiminde ifade edilebilir.

$$\frac{m}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

integrali

$$u = ax^2+bx+c$$

değişken değiştirmesi ile kolaylıkla hesaplanır.

$$\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

integrali ise, $(I.)$ de verilen yöntem ile hesaplanır.

$III.$ $\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ tipindeki integraller

$$t = \frac{1}{px+q}$$

değişken değiştirmesi ile (a) da verilen forma dönüştürülerek hesaplanır.

Örnek 10. (a) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$ integralini hesaplamak için; $8-2x-x^2 = 9-(x+1)^2$ yazılarak

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{3}\right)^2}}$$

elde edilir. $t = \frac{x+1}{3}$ değişken değiştirmesi ile integral kolaylıkla hesaplanır.

(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}$ integralini hesaplamak için; $x^2+6x+10 = (x+3)^2 + 1$ yazılarak $u = x+3$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}} &= \int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} \\ &= \ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)+C \\ &= \ln\left(x+3+\sqrt{(x+3)^2+1}\right)+C \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

(c) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx$ integralini hesaplamak için

$$x^2+4x+1 = u$$

değişken değiştirmesi yapılırsa $(2x+4)\,dx = du$ olup verilen integral

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+1}}dx - 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$$

formunda yazılarak hesaplanır.

5. Binom İntegralleri

a ve b iki reel sayı, p, q ve r rasyonel sayılar olmak üzere

$$\int x^r \left(a + bx^p\right)^q dx$$

formunda verilen integrallere binom integralleri adı verilir. Bu tip integralleri basitleştirmek için aşağıda verilen dönüşümler kullanılabilir:

$I.$ $q \in \mathbb{Z}$ ise, r ve p sayılarının paydalarının en küçük ortak katı k olmak üzere $x = t^k$ dönüşümü verilen integrantı bir rasyonel fonksiyona dönüştürür.

$II.$ $q \notin \mathbb{Z}$ ise, $x^p = y$ dönüşümü yardımıyla

$$\int (a + by)^q \, y^{\frac{r+1}{p}-1} dy$$

integrali elde edilir. $\frac{r+1}{p} \in \mathbb{Z}$ ise, q sayısının paydası n olmak üzere $a+by = t^n$ dönüşümü verilen integrantı bir rasyonel fonksiyona dönüştürür.

$III.$ $\int x^r \left(a + bx^p\right)^q dx$ integrali $\int \left(\dfrac{a+by}{y}\right)^q y^{\frac{r+1}{p}+q-1} dy$ formunda yazılabilir. $\frac{r+1}{p} \notin \mathbb{Z}$ ve $\frac{r+1}{p} + x \in \mathbb{Z}$ ise q sayısının paydası n olmak üzere $\dfrac{a+by}{y} = t^n$ dönüşümü verilen integrantı bir rasyonel fonksiyona dönüştürür. $\frac{r+1}{p} + q$ tamsayı ise $ax^{-p} + b = t^n$ dönüşümü verilen integrantı bir rasyonel fonksiyona dönüştürür.

Örnek 11. (a) $\int \sqrt[3]{x} \left(1 + 3\sqrt{x}\right)^2 dx$ integralini hesaplamak için; $x = t^6$ dönüşümü uygulanırsa;

$$\int \sqrt[3]{x} \left(1 + 3\sqrt{x}\right)^2 dx = 6 \int t^2 \left(1 + 3t^3\right)^2 t^5 dt$$

eşitliği elde edilir.