Pozitif Terimli Seriler ve Yakınsaklık Testleri

Her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k \geq 0$ ise $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ serisine *"pozitif terimli bir seri"* denir.

Bir serinin kısmi toplamlar dizisi yardımıyla yakınsak veya ıraksak olduğunu göstermek her zaman kolay değildir. Ancak bir serinin yakınsak veya ıraksak olduğunu bazı testler yardımıyla göstermek mümkündür. Pozitif terimli serilere uygulanan bu testleri aşağıda verelim.

Teorem 5. (İntegral Testi) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitif terimli bir seri olsun. f negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $[1, \infty)$ aralığında azalan ve $k \geq 1$ için $f(k) = a_k$ sağlansın. Bu durumda,

(i) $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ integrali yakınsak ise $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır.

(ii) $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ integrali ıraksak ise $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksaktır.

Örnek 4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{k^2+1}$ serisinin yakınsak olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ fonksiyonu $[1, \infty)$ aralığında negatif olmayan sürekli bir fonksiyondur ve $x \geq 1$ için $f(x)$ azalandır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx &= \int\limits_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1}dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^{b} \frac{x}{x^2+1}dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} \left(\ln\left(b^2+1\right) - \ln 2\right) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

olduğundan bu integral ıraksaktır. Dolayısıyla, integral testi gereğince $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{k^2+1}$ serisi ıraksaktır.

Teorem 6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^p}$ serisi $p > 1$ için yakınsak $p \leq 1$ için ıraksaktır.

Örnek 5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/3}}$ serisi $p = \frac{1}{3} < 1$ olduğundan ıraksaktır.

Teorem 7. (Karşılaştırma Testi) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serileri pozitif terimli iki seri olsun. Bu durumda,

(i) Her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k \leq b_k$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisi yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi de yakınsaktır.

(ii) Her $k \in \mathbb{N}$ için $b_k \leq a_k$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisi ıraksak ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi de ıraksaktır.

Örnek 6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4+k+1}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm. $k \geq 1$ için

$$\frac{1}{k^4+k+1} < \frac{1}{k^4}$$

sağlanır. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ serisi Teorem 6'dan yakınsak olduğundan karşılaştırma testinden $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4+k+1}$ serisi de yakınsaktır.

Teorem 8. (Limit Testi) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitif terimli bir seri ve $\lim_{k\to\infty} k^p a_k = \gamma$ olsun. Bu durumda,

(i) $0 \leq \gamma < \infty$ ve $p > 1$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır.

(ii) $0 < \gamma \leq \infty$ ve $p \leq 1$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksaktır.

Örnek 7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3+2k+1}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm. $p = 3$ alınırsa

$$\lim_{k\to\infty} k^p a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k^3}{k^3+2k+1} = 1 = \gamma$$

elde edilir. $p = 3 > 1$ ve $\gamma = 1$ olduğundan limit testinden seri yakınsaktır.

Örnek 8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+3}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm. $p = 1$ için

$$\lim_{k\to\infty} k^p a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+3} = 1 = \gamma$$

elde edilir. $p = 1$ ve $\gamma = 1$ olduğundan limit testinden seri ıraksaktır.

Teorem 9. (Oran Testi) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitif terimli bir seri ve $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ olsun. Bu durumda,

(i) $r < 1$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır.

(ii) $r > 1$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksaktır.

(iii) $r = 1$ ise oran testi sonuç vermez.

Örnek 9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$ serisinin yakınsak olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm. Oran testinden

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{2^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\dfrac{2^k k!}{k^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{2}{e} < 1$$

olup seri yakınsaktır.

Örnek 10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(k+1)\,3^k}$ serisinin yakınsak olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm. Oran testinden

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{(k+1)!}{(k+2)\,3^{k+1}}}{\dfrac{k!}{(k+1)\,3^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{3(k+2)} = \infty$$

olduğundan seri ıraksaktır.

Teorem 10. (Kök Testi) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitif terimli bir seri ve $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = r$ olsun. Bu durumda,

(i) $r < 1$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır.

(ii) $r > 1$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksaktır.

(iii) $r = 1$ ise kök testi sonuç vermez.

Örnek 11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$ serisinin yakınsak olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm. Kök testinden

$$r = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 < 1$$

olduğundan seri yakınsaktır.

Örnek 12. $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k^2}$ serisinin yakınsak olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm. Kök testinden

$$r = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{2^{-k^2}} = \lim_{k\to\infty} 2^{-k} = 0 < 1$$

olduğundan seri yakınsaktır.

Alterne Seriler

Terimleri ardışık olarak işaret değiştiren serilere *"alterne seri"* denir. Örneğin

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} 2^k \qquad \text{ve} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

serileri birer alterne seridir.

Teorem 11. (Leibnitz Testi) Her $k \geq 1$ için $0 < a_{k+1} \leq a_k$ ve $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ alterne serisi yakınsaktır.

Örnek 13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm. $a_k = \frac{1}{2k+1}$ alınırsa $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} = 0$ dır ve $k \geq 1$ için $\frac{1}{2k+3} < \frac{1}{2k+1}$ olduğundan $0 < a_{k+1} \leq a_k$ bulunur. Leibnitz testi gereğince verilen seri yakınsaktır.

Örnek 14. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k (k+1)}{(3k-2)}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm. $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k+1}{3k-2} = \dfrac{1}{3} \neq 0$ olduğundan seri ıraksaktır.

Tanım 3. (Mutlak Yakınsaklık) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ serisi yakınsak ise $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi *"mutlak yakınsaktır"* denir.

Tanım 4. (Şartlı Yakınsaklık) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsak, fakat $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ serisi ıraksak ise $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi *"şartlı yakınsaktır"* denir.

Teorem 12. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ serisi yakınsak ise $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi de yakınsaktır. Yani, mutlak yakınsak her seri yakınsaktır.

Örnek 15. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1} 2^k k!}{k^k}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left| \dfrac{(-1)^{k+1} 2^k k!}{k^k} \right| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2^k k!}{k^k}$ serisinin yakınsak olduğu Örnek 9' dan görülmektedir. Dolaysıyla, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1} 2^k k!}{k^k}$ alterne serisi mutlak yakınsaktır. Mutlak yakınsak her seri yakınsak olduğundan bu alterne seri yakınsaktır.

Örnek 16. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ serisinin şartlı yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left| \dfrac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \right| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2k+1}$ serisi ıraksak bir seridir. Gerçekten, limit testinden $p = 1$ için $\lim\limits_{k\to\infty} k^p a_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{2k+1} = \dfrac{1}{2} = \gamma$ olduğundan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2k+1}$ serisi ıraksaktır. Diğer taraftan, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ alterne serisi Örnek 13'den yakınsaktır. Dolayısıyla, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ serisi şartlı yakınsaktır.