DİFERENSİYEL KAVRAMI

Eğrilere yaklaşmanın bir yolu da bu eğrilerin belirli noktalarındaki teğetlerini kullanmaktır. $y = f(x)$ eğrisi a noktasının bir komşuluğunda sürekli olsun. $y = f(x)$ eğrisinin $P(a, f(a))$ noktasındaki teğetinin denklemi;

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda; P noktasındaki teğet $y = t(x)$ olmak üzere, a noktasının yeterince küçük bir komşuluğunda bulunan x reel sayıları için

$$f(x) \approx t(x)$$

yazılabilir. Bu yaklaşıklık *tanjant yaklaşım* olarak adlandırılır. Eğer; $\Delta x = x - a$ yazılırsa

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x$$

olacaktır ve böylece

$$\Delta f(a) \approx f'(a)\Delta x \tag{1}$$

elde edilir. Diğer yandan; $y = t(x)$ teğet denkleminde, $\Delta x = x - a$ yazılırsa

$$t(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x \Longrightarrow f'(a)\Delta x = t(a + \Delta x) - f(a) \tag{2}$$

elde edilir. f fonksiyonunun a noktasındaki diferensiyeli

$$df(a) = f'(a)\Delta x$$

olarak tanımlanır. $df(a)$; x, a dan $a + \Delta x$ e değişirken $y = t(x)$ teğetinin ordinatındaki değişimi verir. Bu durumda; *f fonksiyonunun herhangi bir x noktasındaki diferensiyeli*;

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

olacaktır.

Özel olarak; $g(x) = x$ fonksiyonunun bir x noktasındaki diferensiyeli ele alınırsa $dg(x) = g'(x)\Delta x$ eşitliğinden $dx = \Delta x$ elde edilir. Böylece; bağımsız değişkene göre artma ve diferensiyelin eşit olduğu görülür.

f ve g fonksiyonları x noktasının bir komşuluğunda sürekli ve c sabit olmak üzere;

$$\begin{aligned} d(f \mp g) &= df \mp dg \\ dc &= 0 \\ dcf &= cdf \end{aligned}$$

dir.

Örnek 1. $\sqrt{98}$ sayısının yaklaşık değerini tanjant yaklaşım yöntemini kullanarak belirleyiniz.

Örnek 2. $\sin 46°$ sayısının yaklaşık değerini tanjant yaklaşım yöntemini kullanarak belirleyiniz.

BELİRSİZ İNTEGRAL

Tanım f bir I aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer; her $x \in I$ için

$$F'(x) = f(x)$$

eşitliğini sağlayan bir F fonksiyonu varsa, F fonksiyonuna f fonksiyonunun bir *antitürevi* adı verilir.

Örnek 1. $f(x) = 3x$ fonksiyonunun bazı antitürevleri; $f(x) = x^3$, $g(x) = x^3 + 1$, $h(x) = x^3 + 7$ dir.

Teorem f bir I aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun iki antitürevi arasındaki fark sabittir.

Bu durumda; bir I aralığı üzerinde tanımlı f fonksiyonunun bir antitürevi F ise, f fonksiyonunun antitürevleri C bir sabit olmak üzere, genel olarak $F(x) + C$ biçiminde ifade edilir.

Tanım f fonksiyonu I aralığı üzerinde türevlenebilir olsun. f fonksiyonunun tüm antitürevlerinin sınıfına *f fonksiyonunun x değişkenine göre belirsiz integrali* denir ve bu sınıf

$$\int f(x)\,dx$$

ile gösterilir. $\int$ simgesine integral işareti, $f(x)$ ifadesine integrant, x değişkenine ise integrasyon değişkeni adı verilir.

Bu tanıma göre; f fonksiyonunun I aralığı üzerinde bir antitürevi F ise;

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,\ \ C \in \mathbb{R}$$

olacaktır.

İyi bilinen bazı türev formülleri gözönüne alınarak aşağıda verilen integral formülleri kolaylıkla elde edilir:

$\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C \ \ (m \neq -1)$ $\qquad \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ $\qquad \int e^x dx = e^x + C$

$\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\qquad \int \cos x dx = \sin x + C$

$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$ $\qquad \int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = -\tan x + C$

$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$ $\qquad \int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$ $\qquad \int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C$

$\int \sinh x dx = \cosh x + C$ $\qquad \int \cosh x dx = \sinh x + C$

$\int af(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$ $\qquad \int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

Örnek 2. (a) $\int \left(3\cos x + \sqrt[5]{x^4} + \dfrac{1}{x}\right) dx = 3\sin x + \dfrac{4}{5} x^{-1/5} + \ln|x| + C$

(b) $\int \left(\dfrac{2}{\cos^2 x} + 5e^x + \dfrac{1}{1+x^2}\right) dx = 2\tan x + 5e^x + \arctan x + C$

(c) $\int \left(5\cosh x + \sin x + \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx = 5\sinh x - \cos x + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$

İntegral Alma Yöntemleri

Doğrudan hesaplayamadığımız bazı integralleri hesaplamak için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir:

1. Değişken Değiştirme Yöntemi

f fonksiyonu I aralığı üzerinde sürekli ve $u = g(x)$ diferensiyellenebilir fonksiyonunun görüntü kümesi I ise,

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

eşitliği elde edilir.

Örnek 3. $I = \int (1-3x)^5\, dx$ integralini hesaplamak için $u = 1 - 3x$ alınırsa $du = -3dx$ bulunur. Böylece;

$$\int (1-3x)^5\, dx = \int u^5 \frac{du}{-3}$$

eşitliği elde edilir. Sağ taraftaki integral kolaylıkla hesaplanır:

$$\int u^5 \frac{du}{-3} = \frac{-u^6}{36} + C$$

ve dolayısıyla

$$I = \frac{-(1-3x)^6}{36} + C$$

dir.

Örnek 4. Aşağıda verilen integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ integralinde $t = \sqrt{x}$ alınırsa $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ olacaktır. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \int 2^t 2dt = 2 \int 2^t dt \\ &= 2\frac{2^t}{\ln 2} + C = \frac{1}{\ln 2} 2^{t+1} + C \\ &= \frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\ln 2} + C \end{aligned}$$

dir.

(b) $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx$ integralinde $t = g(x)$ alınırsa $dt = g'(x)\,dx$ olacaktır. Bu durumda;

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|g(x)| + C$$

dir.

(c) $\int \cot x dx$

(d) $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} dx$

(e) $\int \frac{dx}{16 + x^2}$

Uyarı 1. Değişken değiştirme yöntemi kullanılırken, bazı özel tipte fonksiyonların integralleri için uygulanan değişken değiştirmeler belirlidir. Örneğin;

(1) İntegrant $\sqrt{a^2 - x^2}$ den başka köklü ifade içermeyen bir fonksiyon ise,

$$x = a \sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

değişken değiştirmesi yapılarak, integrant trigonometrik fonksiyonların bir rasyonel ifadesine dönüştürülür.

(2) İntegrant $\sqrt{x^2-a^2}$ den başka köklü ifade içermeyen bir fonksiyon ise,

$$x = a\sec t,\ 0 < t < \frac{\pi}{2} veya \frac{\pi}{2} < t < \pi$$

değişken değiştirmesi yapılarak, integrant köklü ifade içermeyen bir fonksiyona dönüştürülür.

(3) İntegrant $\sqrt{x^2+a^2}$ den başka köklü ifade içermeyen fonksiyon ise,

$$x = a\tan t,\ \ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

değişken değiştirmesi yapılarak integrant basitleştirilir.

(4) Trigonometrik fonksiyonların rasyonel ifadesi biçimindeki integrantlar için

$$\tan\frac{x}{2} = t$$

değişken değiştirmesi yapılarak, integrant bir rasyonel fonksiyona dönüştürülür.

Örnek 5. Aşağıda verilen integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}dx$ integralini hesaplamak için $x = 2\sin t$ dönüşümü uygulanırsa $dx = 2\cos t dt$ olacaktır. Bu durumda;

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}dx &= \int (2\sin t + 3)\, dt \\ &= -2\cos t + 3t + C \\ &= -\sqrt{4-x^2} + 3\arcsin\frac{x}{2} + C\end{aligned}$$

dir.

(b) $x > 3$ olmak üzere $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$ integralini hesaplamak için $x = 3\sec\theta$ dönüşümü uygulanırsa $dx = 3\sec\theta\tan\theta d\theta$ olacaktır. Bu durumda;

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}} &= \int \frac{3\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{9\sec^2\theta-9}}d\theta = \int \sec\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln|1+\sin\theta| - \ln|1-\sin\theta|\right) + C\end{aligned}$$

dir.

(c) $\int \dfrac{2dy}{\sqrt{1+4y^2}}$ integralini hesaplamak için öncelikle $2y = t$ dönüşümü uygulanırsa $2dy = dt$ olup

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

integrali elde edilir. Bu integrale $t = \tan\theta$ dönüşümü uygulanırsa $dt = (1+\tan^2\theta)\,d\theta$ olacaktır. Bu durumda;

$$\begin{aligned}\int \frac{2dy}{\sqrt{1+4y^2}} &= \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int \frac{1+\tan^2\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} d\theta \\ &= \int \sec\theta d\theta = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right| + C\end{aligned}$$

elde edilir. Sırasıyla; $\sin\theta = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ ve $t = 2y$ yazılarak sonuç elde edilir.

(d) $\int \dfrac{dx}{1+\sin x}$ integralini hesaplamak için $\tan\dfrac{x}{2} = t$ dönüşümü uygulanırsa $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ ve $\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$olacağından

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\sin x} &= \int \frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \int \frac{2dt}{t^2+2t+1} = \int \frac{2dt}{(t+1)^2}\end{aligned}$$

integrali elde edilir. Son olarak; $t+1 = u$ dönüşümü uygulanarak integral hesaplanır.

2. Kısmi İntegrasyon Yöntemi

Kısmi integrasyon yöntemi $\int f(x)\,g(x)\,dx$ tipindeki integralleri basitleştirmek için kullanılır.

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\,g(x)\right] = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

eşitliğinin her iki yanı x değişkenine göre integrallenirse

$$\begin{aligned}\int \frac{d}{dx}\left[f(x)\,g(x)\right] dx &= \int \left[f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)\right] dx \\ &= \int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx\end{aligned}$$

olur ve böylece

$$\begin{aligned}\int f'(x)\,g(x)\,dx &= f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx \\ \int f(x)\,g'(x)\,dx &= f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Son eşitliklerde $u = f(x)$ ve $v = g(x)$ alınırsa kısmi integrasyon formülü olarak adlandırılan

$$\int udv = uv - \int vdu$$

eşitliği elde edilir.

Örnek 6. (a) $\int xe^{5x}dx$ integralini hesaplamak için $u = x$ ve $dv = e^{5x}dx$ alınır ve kısmi integrasyon formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\int xe^{5x}dx &= uv - \int vdu \\ &= \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5}\int e^{5x}dx \\ &= \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} + C\end{aligned}$$

elde edilir.

(b) $\int x\cos 3xdx$ integralinde $u = x$ ve $dv = \cos 3xdx$ alınırsa

$$\begin{aligned}\int x\cos 3xdx &= \frac{1}{3}x\sin x - \frac{1}{3}\int \sin 3xdx \\ &= \frac{1}{3}x\sin x + \frac{1}{9}\cos x + C\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

(c) $\int x^3\ln xdx$ integralinde $u = \ln x$ ve $dv = x^3dx$ alınırsa

$$\begin{aligned}\int x^3\ln xdx &= \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{4}\int x^3dx \\ &= \frac{1}{4}x^4\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + C\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

(d) $\int \arctan x dx$ integralinde $u = \arctan x$ ve $dv = dx$ alınır, böylece daha basit bir integral içeren

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

eşitliği elde edilerek integral hesaplanır.