KUVVET SERİLERİ, TAYLOR SERİLERİ

Kuvvet Serileri

Tanım 1. $x_0 \in \mathbb{R}$ ve $\forall k = 0, 1, 2...$ için $c_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + ...$$

şeklindeki bir seriye kuvvet serisi denir. Buradaki c_k sayılarına serinin katsayıları adı verilir.

Eğer $\forall k \geq p$ için $c_k = 0$ ise bu takdirde

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + ... + c_p(x - x_0)^p$$

olur. Bu özel durumda kuvvet serisi bir polinom olur.

Verilen bir kuvvet serisinde incelenecek problem verilen bir kuvvet serisinin hangi x ler için yakınsak, hangileri için ıraksak olduğudur.

Her kuvvet serisinin $x = x_0$ için yakınsak olacağı açıktır. Bu nedenle hangi x ler derken x_0 dan farklı x leri kastediyoruz. Her x için yakınsak kuvvet serileri de vardır.

Örneğin:
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ serisi her $x \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır. Her $x \in \mathbb{R}$ için oran testinden

$$\lim \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim \left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} . \frac{k!}{x^k} \right| = \lim \frac{|x|}{k+1} = 0 < 1$$

olup serinin her x için yakınsak olduğu çıkar.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{100^k} (x-2)^k$ serisi de 2 den farklı her x için ıraksaktır. Gerçekten her $x \neq 2$ için

$$\lim \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim \left| \frac{(k+1)!(x-2)^{k+1}}{100^{k+1}} \frac{100^k}{k!(x-2)^k} \right| = \lim |x-2| \frac{(k+1)}{100}$$

$$= \infty . \frac{|x-2|}{100} = \infty > 1$$

olur.

Tanım 2. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ kuvvet serisinin $|x-x_0| < R$ için yakınsak olduğu en büyük pozitif R sayısına, bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı, seriyi yakınsak yapan x noktalarının oluşturduğu aralığa da yakınsaklık aralığı denir.

Yakınsaklık yarıçapı aşağıdaki teorem yardımıyla kolayca bulunabilir:

Teorem 1. (Cauchy-Hadamard Teoremi) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ kuvvet serisi için $\lim \sqrt[n]{|c_n|} = L$ olsun.

1) $L \neq 0$ ise $R = \frac{1}{L}$ dir. Bu halde seri $|x-x_0| < R$ için yakınsak, $|x-x_0| > R$ için ıraksaktır.

2) $L = 0$ ise $R = \infty$ dur. Bu durumda seri her x için yakınsaktır.

3) $L = \infty$ ise $R = 0$ dır. Bu durumda seri sadece $x = x_0$ için yakınsaktır.

Örnek 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

Çözüm. $L = \lim \sqrt[n]{|c_n|} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$ olduğundan $R = \frac{1}{L} = 1$ dir. O halde verilen seri $|x-3| < 1$ için yakınsaktır.

$$|x-3| < 1 \Rightarrow -1 < x-3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4$$

olur. O halde seri $(2,4)$ aralığında yakınsaktır. $x = 2$ ve $x = 4$ için yakınsak olup olmadığını araştıralım. $x = 2$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

alterne serisi elde edilir. $\left(\frac{1}{n}\right)$ monoton azalan bir sıfır dizisi olduğundan bu seri yakınsaktır.

$x = 4$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak serisi elde edilir. O halde yakınsaklık aralığı $[2,4)$ aralığıdır.

Cauchy- Hadamard teoreminde $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ yerine $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = L$ alınabilir.

Teorem 2. (Terim- Terim Türevlenebilme Teoremi)

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı R ve $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ için

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$$

olsun. f fonksiyonu $(x_0 - R, x_0 + R)$ aralığında türevlenebilirdir ve

$$f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} [c_k(x-x_0)^k]' = \sum_{k=0}^{\infty} kc_k(x-x_0)^{k-1}$$

dir.

Ayrıca $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} kc_k(x-x_0)^{k-1}$ serilerinin yakınsaklık yarıçapları aynıdır.

Teorem 3. (Terim- Terim İntegrallenebilme Teoremi)

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı R ve $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ için

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$$

olsun. f fonksiyonu $(x_0 - R, x_0 + R)$ aralığında integrallenebilirdir ve

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_{x_0}^{x} (t-x_0)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1}$$

dır.

Taylor Serileri

Tanım 1. f fonksiyonu x_0 noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ...$$

serisine, f fonksiyonu tarafından a noktasında üretilen Taylor serisi adı verilir.

Şimdi bazı fonksiyonlar tarafından üretilen birkaç Taylor serisi bulalım.

Örnek 1. $f(x) = e^{2x}$ fonksiyonunun $x = 1$ noktası civarında ürettiği Taylor serisini bulunuz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} f'(x) = 2e^{2x} \Rightarrow f''(x) = 2.2e^{2x} = 2^2 e^{2x} \Rightarrow \\ f'''(x) = 2^3 e^{2x}, ..., f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x} \end{aligned}$$

olacağından

$$f^{(n)}(1) = 2^n e^2$$

olur. O halde $f(x) = e^{2x}$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında ürettiği Taylor serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^2}{n!}(x-1)^n$$

olur.

$x = 0$ noktası civarında üretilen Taylor serisine Maclaurin serisi de denir.

Örnek 2. $f(x) = cosx$ fonksiyonunun Maclaurin seri açılımını bulunuz.

Çözüm.

$$f'(x) = -sinx = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -cosx = cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = sinx = cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f^{(n)}(x) = cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

elde edilir.

$$f^{(n)}(0) = cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, n = 2k+1 \\ (-1)^k, n = 2k \end{cases}$$

bulunur. İstenilen Maclaurin serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

olur.

f fonksiyonunun x_0 noktasında ürettiği seri onun kısmi toplamı ile kalan terimin toplamı olarak yazıldığında, kısmi toplam

$$T_n(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

biçiminde n. dereceden bir polinomdur. Bu polinoma f nin x_0 noktasında ürettiği Taylor polinomu adı verilir.

Örnek 3. $f(x) = e^x$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında ürettiği Taylor polinomunu bulunuz.

Çözüm.

$$T_n(x, 0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

olur.

Örnek 4. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında ürettiği 3. dereceden Taylor polinomunu bulunuz.

Çözüm.

$$f(1) = 6,$$
$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 2 \Rightarrow f'(1) = 7,$$
$$f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow f''(1) = 7,$$
$$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'(1) = 6,$$
$$f^{(4)}(x) = 0$$

olduğundan $x^3 + 3x^2 - 2x + 4 = 6 + 7(x+1) + \frac{7}{2}(x+1)^2 + (x+1)^3$ olur.