5. HAFTA

FAKTÖR ANALİZİ

Faktör analizinde amaç, değişkenler arasındaki kovaryans yapısını, gözlenemeyen ancak rasgele değerler olan faktörlerle açıklamaktır. Faktör analiz modelinde değişkenlerin aralarındaki korelasyona göre gruplandırıldığı kabul edilir.

Ortogonal Faktör Modeli

p bileşenli gözlenebilen $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$ rasgel vektörü için $E(\underline{X}) = \underline{\mu}$ ve $Cov(\underline{X}) = \mathbf{\Sigma}$ olsun. Bir faktör modeli $\underline{X}$'in faktör adı verilen $F_1, F_2, ..., F_m$ gözlenemeyen rasgele değişkenlere göre lineer bağımlılığını ve hata adı verilen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_p$ gibi p tane ek değişim kaynağından oluşur. Bu hatalara bazen özel faktörler de denir.

Genel olarak bir faktör analizi modeli,

$$
\begin{aligned}
X_1 - \mu_1 &= l_{11}F_1 + l_{12}F_2 + ... + l_{1m}F_m + \varepsilon_1 \\
X_2 - \mu_2 &= l_{21}F_1 + l_{22}F_2 + ... + l_{2m}F_m + \varepsilon_2 \\
&. \\
&. \\
&. \\
X_p - \mu_p &= l_{p1}F_1 + l_{p2}F_2 + ... + l_{pm}F_m + \varepsilon_p
\end{aligned}
$$

biçiminde veya matris gösterimiyle

$$\underset{(px1)}{\underline{X}} - \underset{(px1)}{\underline{\mu}} = \underset{(pxm)}{\mathbf{L}} \underset{(mx1)}{\underline{F}} + \underset{(px1)}{\underline{\varepsilon}}$$

olarak ifade edilir. Burada l_{ij} katsayısı, j inci faktör üzerinde i inci değişkenin ağırlığıdır ve $j = 1, 2, ..., m, \quad i = 1, 2, ..., p$ dir. Böylece $\mathbf{L}$ matrisi de faktör ağırlıklar(yükleri) matrisidir. ε_i, i inci özel faktör sadece i inci değişken X_i ile ilişkilidir. $X_1 - \mu_1, X_2 - \mu_2, ..., X_p - \mu_p$ sapmaları(farkları), gözlenemeyen $p + m$ tane $F_1, F_2, ..., F_m$ ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_p$ rasgele değişkenlerine göre ifade edilir.

Varsayımlar:

$$E(\underline{F}) = \underline{0}_{mx1}$$

$$Cov(\underline{F}) = E(\underline{F}\underline{F}') = \mathbf{I}_{mxm}$$

$$E(\underline{\varepsilon}) = \underline{0}_{px1}$$

$$\begin{aligned} Cov(\underline{\varepsilon}) &= E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}') \\ &= \Psi_{pxp} \\ &= \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \psi_2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \psi_p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve $\underline{F}$ ile $\underline{\varepsilon}$ ilişkisizdir. Yani

$$Cov(\underline{\varepsilon}, \underline{F}) = E(\underline{\varepsilon}\underline{F}') = 0_{pxm}$$

dir.

Yukarıdaki varsayımlardan ve $\underset{(px1)}{\underline{X}} - \underset{(px1)}{\underline{\mu}} = \underset{(pxm)}{\mathbf{L}} \underset{(mx1)}{\underline{F}} + \underset{(px1)}{\underline{\varepsilon}}$ ilişkisinden ortogonal faktör modeli oluşur.

Ortogonal faktör modeli $\underline{X}$ rasgele vektörünün varyans-kovaryans yapısını verir. $\underline{X}$ rasgele vektörünün varyans-kovaryans matrisinin

$$\begin{aligned} Cov(\underline{X}) &= E(\underline{X} - \underline{\mu})(\underline{X} - \underline{\mu})' \\ &= \mathbf{\Sigma}_{pxp} \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. $\underset{(px1)}{\underline{X}} - \underset{(px1)}{\underline{\mu}} = \underset{(pxm)}{\mathbf{L}} \underset{(mx1)}{\underline{F}} + \underset{(px1)}{\underline{\varepsilon}}$ ortogonal faktör modeli

$$\begin{aligned} \underline{X} - \underline{\mu} &= \mathbf{L}\underline{F} + \underline{\varepsilon} \\ (\underline{X} - \underline{\mu})(\underline{X} - \underline{\mu})' &= (\mathbf{L}\underline{F} + \underline{\varepsilon})(\mathbf{L}\underline{F} + \underline{\varepsilon})' \\ &= (\mathbf{L}\underline{F} + \underline{\varepsilon})((\mathbf{L}\underline{F})' + (\underline{\varepsilon})') \\ &= \mathbf{L}\underline{F}(\mathbf{L}\underline{F})' + \underline{\varepsilon}(\mathbf{L}\underline{F})' + \mathbf{L}\underline{F}\underline{\varepsilon}' + \underline{\varepsilon}\ \underline{\varepsilon}' \end{aligned}$$

biçiminde düzenlenebilir. Bu ifadenin beklenen değeri alınırsa,

$$\begin{aligned}
E(\underline{X}-\underline{\mu})(\underline{X}-\underline{\mu})' &= E(\mathbf{L}\underline{F}(\mathbf{L}\underline{F})') + E(\underline{\varepsilon}(\mathbf{L}\underline{F})') + E(\mathbf{L}\underline{F}\underline{\varepsilon}') + E(\underline{\varepsilon}\ \underline{\varepsilon}') \\
&= E(\mathbf{L}\underline{F}\underline{F}'\mathbf{L}') + E(\underline{\varepsilon}\underline{F}'\mathbf{L}') + E(\mathbf{L}\underline{F}\underline{\varepsilon}') + E(\underline{\varepsilon}\ \underline{\varepsilon}') \\
&= \mathbf{L}E(\underline{F}\underline{F}')\mathbf{L}' + E(\underline{\varepsilon}\underline{F}')\mathbf{L}' + \mathbf{L}E(\underline{F}\underline{\varepsilon}') + E(\underline{\varepsilon}\ \underline{\varepsilon}') \\
&= \mathbf{L}\mathbf{L}' + \Psi
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. İfade açık olarak yazılırsa

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{\Sigma} & = & \mathbf{L} & & \mathbf{L}' & + & \Psi
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}
\sigma_{11} & \sigma_{12} & . & . & . & \sigma_{1p} \\
\sigma_{12} & \sigma_{22} & . & . & . & \sigma_{2p} \\
. & . & . & & & . \\
. & . & & . & & . \\
. & . & & & . & . \\
\sigma_{1p} & \sigma_{2p} & . & . & . & \sigma_{pp}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
l_{11} & l_{12} & . & . & . & l_{1m} \\
l_{21} & l_{22} & . & . & . & l_{2m} \\
. & . & . & & & . \\
. & . & & . & & . \\
. & . & & & . & . \\
l_{p1} & l_{p2} & . & . & . & l_{pm}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
l_{11} & l_{21} & . & . & . & l_{p1} \\
l_{12} & l_{22} & . & . & . & l_{p2} \\
. & . & . & & & . \\
. & . & & . & & . \\
. & . & & & . & . \\
l_{1m} & l_{2m} & . & . & . & l_{pm}
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
\psi_{1} & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & \psi_{2} & . & . & . & 0 \\
. & . & . & & & . \\
. & . & & . & & . \\
. & . & & & . & . \\
0 & 0 & . & . & . & \psi_{p}
\end{bmatrix}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
Var(X_i) &= \sigma_{ii} \\
&= l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + \ldots + l_{im}^2 + \psi_i
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
Cov(X_i X_k) &= \sigma_{ik} \\
&= l_{i1}l_{k1} + l_{i2}l_{k2} + \ldots + l_{im}l_{km}
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca, rasgele değişkenler ile faktörler arasındaki ilişki de incelenebilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\underline{X}-\underline{\mu} &= \mathbf{L}\underline{F} + \underline{\varepsilon} \\
(\underline{X}-\underline{\mu})\underline{F}' &= (\mathbf{L}\underline{F} + \underline{\varepsilon})\underline{F}' \\
&= \mathbf{L}\underline{F}\underline{F}' + \underline{\varepsilon}\underline{F}'
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
Cov(\underline{X},\underline{F}) &= E(\underline{X}-\underline{\mu})(\underline{F}-(\underline{F}))' \\
&= E(\underline{X}-\underline{\mu})(\underline{F})' \\
&= E(\mathbf{L}\underline{F}\underline{F}' + \underline{\varepsilon}\underline{F}') \\
&= \mathbf{L}E(\underline{F}\underline{F}') + E(\underline{\varepsilon}\underline{F}') \\
&= \mathbf{L}
\end{aligned}$$

dir.

Buradan,

$$Cov(X_i F_j) = l_{ij}$$

dir.

Sonuç olarak X_i rasgele değişkenin varyansının *m* tane ortak faktörce açıklanan kısmına, ortak faktör varyansı (ortaklık) ve açıklanamayan kısmına özel faktör varyansı veya hata varyansı adı verilmektedir. Böylece

$$\begin{aligned} Var(X_i) &= \sigma_{ii} \\ &= l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + \dots + l_{im}^2 + \psi_i \end{aligned}$$

ifadesinde $h_i^2 = l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + \dots + l_{im}^2$ olarak alınırsa

$$\sigma_{ii} = h_i^2 + \psi_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, p$$

dir.

Örnek 7:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 19 & 30 & 2 & 12 \\ & 57 & 5 & 23 \\ & & 38 & 47 \\ & & & 68 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad L = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \\ -1 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \text{ olarak verilsin.}$$

Değişkenlerin özel varyans matrisini elde ediniz.

Çözüm 7:

Değişkenlerin özel varyans matrisi $\psi = Cov\left(\underset{\sim}{\varepsilon}\right) = diag\left\{\psi_i\right\}$ idi.

$$Var\left(X_i\right) = \sum_{j=1}^{m} l_{ij}^2 + \psi_i$$ olup buradan

$$\psi_i = Var\left(X_i\right) - \underbrace{\sum_{j=1}^{m} l_{ij}^2}_{h_i^2} \, , \; i = 1, 2, \dots, p$$

(hata varyansı, açıklanamayan kısım)

l_{ij}^2 : j. faktör üzerinde i. değişkenin ağırlığıdır. Böylece L matrisi faktör ağırlıkları matrisidir.

$h_1^2 = l_{11}^2 + l_{12}^2 = 4^2 + 1^2 = 17$ $\psi_1 = Var\left(X_1\right) - h_1^2 = 19 - 17 = 2$	$h_3^2 = l_{31}^2 + l_{32}^2 = (-1)^2 + 6^2 = 37$ $\psi_3 = Var\left(X_3\right) - h_3^2 = 38 - 37 = 1$
$h_2^2 = l_{21}^2 + l_{22}^2 = 7^2 + 2^2 = 53$ $\psi_2 = Var\left(X_2\right) - h_2^2 = 57 - 53 = 4$	$h_4^2 = l_{41}^2 + l_{42}^2 = 1^2 + 8^2 = 65$ $\psi_4 = Var\left(X_4\right) - h_4^2 = 68 - 65 = 3$

$$\psi = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ olarak elde edilir.

Ortogonal bir faktör modelinde, $\underline{X}$ rasgele vektörünün varyans-kovaryans matrisindeki $(p + \frac{1}{2} p(p-1)) = \frac{1}{2} p(p+1)$ tane varyans ve kovaryans; pm tane l_{ij} faktör ağırlıkları ve p tane ψ_i özel varyansından yeniden elde edilmektedir, $i = 1,2,...,p$, $j = 1,2,...,m$. $p = m$ olduğunda varyans-kovaryans matrisi $\mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{LL}'$ ile elde edilir. Bu durumda $\mathbf{\Psi}$ elemanlarını tümü sıfır olan bir matris olur. Ancak $m < p$ olduğunda faktör analizi anlamlı olmaktadır. Bu durumda bir faktör modeli, $\underline{X}$ rasgele vektörünün varyans-kovaryans matrisi $\mathbf{\Sigma}$'daki $\frac{1}{2} p(p+1)$ varyans-kovaryans yapısını, daha az parametreyle açıklamaktadır.

Örnek 8 : p=3 ve m=1 olmak üzere $\underline{X}' = (X_1, X_2, X_3)$ rasgele vktörüne ilişkin pozitif tanımlı varyans-kovaryans matrisi

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.7 \\ & 1 & 0.4 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

olarak verilmiştir. Faktör analizi modelini oluşturunuz. l_{11} ve ψ_1 değerlerini hesaplayınız. Elde ettiğiniz değerleri istatistiksel olarak yorumlayınız.

Çözüm 8 : $\underline{X}_{(p\text{x}1)} - \underline{\mu}_{(p\text{x}1)} = L_{(p\text{x}m)}\underline{F}_{(m\text{x}1)} + \underline{\varepsilon}_{(p\text{x}1)}$ faktör modelinde *p=3* ve *m=1* olduğunu göz önüne alırsak

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} \\ l_{21} \\ l_{31} \end{bmatrix} F_1 + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} X_1 - \mu_1 = l_{11}F_1 + \varepsilon_1 \\ X_2 - \mu_2 = l_{21}F_1 + \varepsilon_2 \\ X_3 - \mu_3 = l_{31}F_1 + \varepsilon_3 \end{matrix}$$

elde edilir. X_1, X_2, X_3 rasgele değişkenlerine ilişkin varyans-kovaryans yapısının $\Sigma = LL' + \Psi$ biçiminde ifade edebileceğini biliyoruz. Buradan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.7 \\ & 1 & 0.4 \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ & l_{21}^2 & l_{21}l_{31} \\ & & l_{31}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 \\ & \psi_2 & 0 \\ & & \psi_3 \end{bmatrix}$$

olup

$$\begin{matrix} 1 = l_{11}^2 + \psi_1 & 0.9 = l_{11}l_{21} & 0.7 = l_{11}l_{31} \\ & 1 = l_{21}^2 + \psi_2 & 0.4 = l_{21}l_{31} \\ & & 1 = l_{31}^2 + \psi_3 \end{matrix}$$

eşitliklerinden $\begin{matrix} 0.7 = l_{11}l_{31} \\ 0.4 = l_{21}l_{31} \end{matrix} \Rightarrow l_{21} = \frac{0.4}{0.7} l_{11}$ bulunur. Bu sonucu $0.9 = l_{11}l_{21}$ eşitliğindeyazarsak $l_{11}^2 = 1.575 \Rightarrow l_{11} = \pm 1.255$ elde edilir. Daha önce verilen varsayımlardan $Var(F_1) = 1$ ve Σ matrisinden $Var(X_1) = 1$ dir. O halde $Corr(X_1, F_1) = Cov(X_1, F_1) = l_{11}$ dir. Ancak korelasyon, mutlak değerce 1'den büyük olamaz. Ayrıca $\psi_1 = 1 - l_{11}^2 = 1 - 1.575 = -0.575 < 0$ olup $Var(\varepsilon_1) = \psi_1$ olduğundan yine çelişki elde edilmektedir. *m*=1 olan bu örnekte $\Sigma = LL' + \Psi$ denklemi için tek bir sayısal çözüm mümkündür. Ancak katsayıların istatistiksel yorumu için sonuç tutarlı değildir. Buradan bu çözüm uygun değildir.