6. HAFTA

Faktör Analizinde Tahmin Yöntemleri

$\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$ rasgele vektörüne ilişkin alınan n birimlik rasgele örneklem $\underline{X}_1, \underline{X}_2, ..., \underline{X}_n$ olsun. Bu rasgele örnekleme ilişkin gözlem değerleri(verilerin) $\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_n$ nin örneklem ortalama vektörü $\underline{\bar{x}}_{px1}$, örneklem varyans-kovaryans matrisi $\mathbf{S}_{pxp}$ ve örneklem korelasyon matrisi $\mathbf{R}_{pxp}$ dir. Faktör analizinde, az sayıda faktörden oluşan faktör modelinin bu verilerin açıklanması için yeterli olup olmadığı araştırılmaktadır. Kitle varyans-kovaryans matrisi $\mathbf{\Sigma}$ bir tahmin edicisi olan örneklem varyans-kovaryans matrisi $\mathbf{S}$ nin diagonal olmayan elamanları küçük veya örneklem korelasyon matrisi $\mathbf{R}'$ nin aynı elemanları sıfırsa, değişkenler ilişkisizdir ve faktör analizinin uygulanması gerek olmayacaktır. Faktör analizinin amacı az sayıda önemli ortak faktörün belirlenmesi olmasına rağmen, bu durumda özel faktörler etken rol oynar.

Faktör analizi modelinde, parametre tahmin yöntemlerinden; temel bileşenler faktör ve en çok olabilirlik yöntemleri üzerinde durulacaktır. Her iki yöntemle elde edilen çözümlerde, faktörlerin daha kolay yorumlanması için döndürülebilirler.

Temel Bileşenler Faktör Tahmin Yöntemi

Kitle varyans kovaryans matrisi $\mathbf{\Sigma}$ nın Spektral Ayrışımı yardımıyla faktörler elde edilebilir. $\mathbf{\Sigma}$ ' nın özdeğer ve özvektör çiftleri $(\lambda_1, \underline{e}_1), (\lambda_2, \underline{e}_2), ..., (\lambda_p, \underline{e}_p)$ ve $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_p \geq 0$ olsun. Buradan, $\mathbf{\Sigma}$ nın Spektral Ayrışımı

$$\mathbf{\Sigma} = \lambda_1 \underline{e}_1 \underline{e}'_1 + \lambda_2 \underline{e}_2 \underline{e}'_2 + ... + \lambda_p \underline{e}_p \underline{e}'_p$$

$$= \left[\sqrt{\lambda_1}\,\underline{e}_1 \;\vdots\; \sqrt{\lambda_2}\,\underline{e}_2 \;\vdots\; . \;\; . \;\; . \;\vdots\; \sqrt{\lambda_p}\,\underline{e}_p \right] \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\,\underline{e}'_1 \\ \cdots \\ \sqrt{\lambda_2}\,\underline{e}'_2 \\ \cdots \\ . \\ . \\ . \\ \cdots \\ \sqrt{\lambda_p}\,\underline{e}'_p \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

Faktör analizi modeli için burada değişken sayısı kadar faktör söz konusudur yani $p = m$ dir ve özel varyanslar sıfırdır yani $\psi_i = 0$, $i = 1,2,...,p$ dır. Burada ağırlık matrisinin j inci sütunu

$$\sqrt{\lambda_j}\,\underline{e}_j \quad , \quad j = 1,2,...,p$$

dir ve

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma}_{pxp} &= \mathbf{L}_{pxp}\mathbf{L}'_{pxp} + 0_{pxp} \\ &= \mathbf{L}\mathbf{L}'\end{aligned}$$

dir. $\sqrt{\lambda_j}$ ölçek faktörü göz önüne alınmazsa, j inci faktör üzerindeki faktör ağırlıkları j inci kitle temel bileşeni için katsayılardır. Burada değişken sayısı kadar ortak faktör söz konusudur. $\mathbf{\Sigma}$ için bu faktör analizinin bu çözümü yeterli olmasına rağmen uygulamada anlamlı değildir. Birkaç ortak faktör ile kovaryans yapısını açıklayan modeller tercih edilir. Yani $\mathbf{\Sigma}$' nın p tane özdeğerden, m tane büyük ve geriye kalan $p-m$ tanesi küçük olduğunda; yaklaşımlardan biri $\mathbf{\Sigma}$ nın Spektral Ayrışımına $\lambda_{m+1}\underline{e}_{m+1}\underline{e}'_{m+1} + \lambda_{m+2}\underline{e}_{m+2}\underline{e}'_{m+2} + ... + \lambda_p\underline{e}_p\underline{e}'_p$' nin katkısı ihmal edilir. Buradan, $\mathbf{\Sigma}$ nın aşağıdaki yaklaşımı elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma} &\cong \left[\sqrt{\lambda_1}\,\underline{e}_1 \;\vdots\; \sqrt{\lambda_2}\,\underline{e}_2 \;\vdots\; . \;.\; .\; . \;\vdots\; \sqrt{\lambda_m}\,\underline{e}_m\right]\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1}\,\underline{e}'_1 \\ \cdots \\ \sqrt{\lambda_2}\,\underline{e}'_2 \\ \cdots \\ . \\ . \\ . \\ \cdots \\ \sqrt{\lambda_m}\,\underline{e}'_m\end{bmatrix} \\ &= \mathbf{L}_{pxm}\mathbf{L}'_{mxp}\end{aligned}$$

dir. Bu yaklaşım, $\underline{\varepsilon}$ özel faktörlerin daha az önemli olduğunu kabul eder ve $\mathbf{\Sigma}$ ‘nın faktörleştirilmesinde ihmal edilebilir. Eğer özel faktörler de modelde olacaksa, bu özel faktörlerin varyansları $\mathbf{\Sigma} - \mathbf{L}\mathbf{L}'$' nın diagonal elemanları olarak alınır. Sonuç olarak

$$\mathbf{\Sigma}_{pxp} = \mathbf{L}_{pxm}\mathbf{L}'_{mxp} + \mathbf{\Psi}_{pxp}$$

$$= \left[\sqrt{\lambda_1}\underline{e}_1 \;\vdots\; \sqrt{\lambda_2}\underline{e}_2 \;\vdots\; . \;.\; .\; .\; \vdots\; \sqrt{\lambda_m}\underline{e}_m \right] \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\underline{e}'_1 \\ \cdots \\ \sqrt{\lambda_2}\underline{e}'_2 \\ \cdots \\ . \\ . \\ . \\ \cdots \\ \sqrt{\lambda_m}\underline{e}'_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \psi_2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \psi_p \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Burada,

$$\psi_i = \sigma_{ii} - \sum_{j=1}^{m} l_{ij}^2 \quad , \quad i = 1,2,...,p$$

dir.

Eğer değişkenlerin ölçü birimleri farklı ise, bu farklılık yorumları etkileyeceğinden, değişkenlerin temel bileşenlerde olduğu gibi standartlaştırılması gerekir. $\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_n$ gözlem değerleri için standartlaştırışmış değerler

$$\underline{z}_j = \begin{bmatrix} \dfrac{(x_{1j} - \overline{x}_1)}{\sqrt{s_{11}}} \\ \dfrac{(x_{2j} - \overline{x}_2)}{\sqrt{s_{22}}} \\ . \\ . \\ . \\ \dfrac{(x_{pj} - \overline{x}_p)}{\sqrt{s_{pp}}} \end{bmatrix} \quad , \; j = 1,2,...,n$$

biçimindedir. Standartlaştırılmış değerlerden elde edilen varyans-kovaryans matrisi, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_n$ gözlemlerinden elde edilen korelasyon matrisidir. $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{LL}' + \mathbf{\Psi}$ gösterimi örneklem varyans-kovaryans matrisi $\mathbf{S}$' ye veya örneklem korelasyon matrisi $\mathbf{R}$'ye uygulanırsa temel bileşenler çözümü adını alır. Böylece örneklem varyans-kovaryans matrisi $\mathbf{S}$'nin temel bileşenler faktör analizi $(\hat{\lambda}_1, \hat{\underline{e}}_1), (\hat{\lambda}_2, \hat{\underline{e}}_2), ..., (\hat{\lambda}_p, \hat{\underline{e}}_p)$ özdeğer ve birim özvektör çiftlerine göre belirlenir, burada $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq ... \geq \hat{\lambda}_p \geq 0$ dir. Ortak faktör sayısı $m < p$ olduğunda, $\{\tilde{l}_{ij}\}$ tahmini faktör ağırlıkları matrisi

$$\tilde{\mathbf{L}}_{pxm} = \left[\sqrt{\hat{\lambda}_1}\,\hat{\underline{e}}_1 \;\vdots\; \sqrt{\hat{\lambda}_2}\,\hat{\underline{e}}_2 \;\vdots\; . \;.\; .\; .\;\vdots\; \sqrt{\hat{\lambda}_m}\,\hat{\underline{e}}_m \right]$$

biçimindedir ve tahmini özel varyanslar $\mathbf{S} - \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{L}}'$ matrisinin diagonal elamanlarıdır, yani

$$\tilde{\mathbf{\Psi}}_{pxp} = \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \tilde{\psi}_2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \tilde{\psi}_p \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Burada,

$$\tilde{\psi}_i = s_{ii} - \sum_{j=1}^{m} \tilde{l}_{ij}^2 \quad , \quad i = 1, 2, ..., p$$

dir. Ayrıca i inci değişkenin ortak faktörlerce açıklanan varyansı

$$\tilde{h}_i^2 = \tilde{l}_{i1}^2 + \tilde{l}_{i2}^2 + ... + \tilde{l}_{im}^2 \quad , \quad i = 1, 2, ..., m$$

olarak elde edilir. Temel bileşen faktör analizi örneklem varyans-kovaryans matrisi $\mathbf{S}$’ nin yerine örneklem korelasyon matrisi $\mathbf{R}$ alınarak da elde edilebilir. Tahmini faktör ağırlıkları, faktör sayısının artmasıyla değişmez. Örneğin,

$$m = 1 \text{ için } \tilde{\mathbf{L}}_{px1} = \left[\sqrt{\hat{\lambda}_1}\,\hat{\underline{e}}_1 \right]$$

$$m = 2 \text{ için } \tilde{\mathbf{L}}_{px2} = \left[\sqrt{\hat{\lambda}_1}\,\hat{\underline{e}}_1 \;\vdots\; \sqrt{\hat{\lambda}_2}\,\hat{\underline{e}}_2 \right]$$

dir, burada $(\hat{\lambda}_1, \hat{\underline{e}}_1), (\hat{\lambda}_2, \hat{\underline{e}}_2)$ $\mathbf{S}$(veya $\mathbf{R}$) için ilk iki özdeğer ve birim özvektör çiftleridir. Görüldüğü gibi $m = 1$ olduğunda elde edilen birinci faktörün ağırlıkları, $m = 2$ için elde edilen birinci faktörün ağırlıkları ile aynıdır.

$\tilde{\psi}_i$’ nin tanımından, $\mathbf{S}$’ nin diagonal elemanları $\tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{L}}' + \tilde{\mathbf{\Psi}}$’ nın diagonal elemanları ile aynıdır. Ancak $\mathbf{S}$’ nin diagonal olmayan elemanları genelde $\tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{L}}' + \tilde{\mathbf{\Psi}}$ ile elde edilemez. Bu durumda faktör sayısı nasıl belirlenecek? Eğer ortak faktör sayısı önsel bilgilerden (yani teoriden veya diğer başka çalışmalardan) belirlenemezse, *m* nin seçimi temel bileşnelerde olduğu gibi tahmini özdeğerlere bağlıdır. Temel bileşen faktör çözümlemesiyle $\mathbf{S}$ nin yaklaşımından elde edilen

$$\mathbf{S}_{pxp} - (\tilde{\mathbf{L}}_{pxm}\tilde{\mathbf{L}}'_{mxp} + \tilde{\mathbf{\Psi}}_{pxp})$$

artık (fark) matrisinin diagonal elamanları sıfır ve diagonal olmayan elemanları küçükse *m* tane faktörlü model yeterlidir.

$(\mathbf{S}_{pxp} - (\tilde{\mathbf{L}}_{pxm}\tilde{\mathbf{L}}'_{mxp} + \tilde{\mathbf{\Psi}}_{pxp}))$ matrisinin elemanlarının kareleri toplamı, ihmal edilen $\hat{\lambda}_{m+1}, \hat{\lambda}_{m+2}, ..., \hat{\lambda}_p$ özdeğerlerin karelerinin toplamından küçük ise, *m* tane faktör yeterlidir. Genelde toplam örneklem varyansı $s_{11} + s_{22} + ... + s_{pp} = tr(\mathbf{S})$ 'ye, ilk birkaç faktörün katkısı çok olacaktır. Buradan X_i değişkenin örneklem varyansı s_{ii} ' ye, birinci ortak faktörün katkısı $\tilde{l}_{i1}^2$ dir . Böylece birinci ortak faktörün toplam örneklem varyansına katkısı

$$\begin{aligned}\tilde{l}_{11}^2 + \tilde{l}_{21}^2 + ... + \tilde{l}_{p1}^2 &= (\sqrt{\hat{\lambda}_1}\,\underline{\hat{e}}_1)'(\sqrt{\hat{\lambda}_1}\,\underline{\hat{e}}_1) \\ &= \hat{\lambda}_1 \underline{\hat{e}}'_1 \underline{\hat{e}}_1 \\ &= \hat{\lambda}_1\end{aligned}$$

dir. Genel olarak

$$(j \text{ inci faktöre göre toplam örneklem varyansının oranı}) = \begin{cases} \dfrac{\hat{\lambda}_j}{s_{11} + s_{22} + ... + s_{pp}} & , \mathbf{S} \text{ den faktörleştirme} \\ \dfrac{\hat{\lambda}_j}{p} & , \mathbf{R} \text{ den faktörleştirme} \end{cases}$$

dir. Bu yaklaşım ortak faktör sayısının belirlenmesi için teorik alt yapısı olmayan deneyimlerden elde edilen bir yöntemdir. Modelde yer alacak ortak faktör sayısı, toplam örneklem varyansını yeterli açıklama payına ulaşıncaya kadar artırılır.

Diğer bir yol eğer örneklem korelasyon matrisi $\mathbf{R}$ ' den faktörleştirme yapılıyor ise, faktör sayısı *m*, 1 den büyük özdeğer sayısına eşit alınabilir.

Örnek 9 : Bir firma kahvaltıda kullanılmak üzere yeni bir gıda üretiyor. Firma ürünü kullanan müşterilerine 5 adet soru soruyor. Ürüne ilişkin sorulan özellikler :

X_1: Tat

X_2: Para vermeye değerliliği

X_3: Koku

X_4: Kahvaltı için uygunluğu

X_5: Enerji vericiliği

Bu değişkenlere ilişkin örneklem korelasyon matrisi

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.02 & 0.96 & 0.42 & 0.01 \\ & 1 & 0.13 & 0.71 & 0.85 \\ & & 1 & 0.50 & 0.11 \\ & & & 1 & 0.79 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

olarak verilsin. Tahmini faktör ağırlıklarını, özel varyans matrisini, ortak faktör matrisini bulunuz.

Çözüm 9 : Korelasyon matrisinde işaretlenen değerler incelendiğinde 1 ile 3 ve 2 ile 5 değişkenlerinin bir grup oluşturduğu söylenebilir. 4. değişken (1,3) grubuna göre (2,5) grubuna daha yakındır. Buna göre yapının 2 veya 3 ortak faktör ile açıklanabilmesi beklenir.

R nin özdeğerleri ve birim özvektörleri

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_1 &= 2.85 & \hat{e}_1' &= \begin{bmatrix} 0.3315 & 0.4602 & 0.3821 & 0.5560 & 0.4726 \end{bmatrix} \\
\hat{\lambda}_2 &= 1.81 & \hat{e}_2' &= \begin{bmatrix} 0.6072 & -0.3900 & 0.5565 & -0.0781 & -0.4042 \end{bmatrix} \\
\hat{\lambda}_3 &= 0.20 & \hat{e}_3' &= \begin{bmatrix} -0.0985 & -0.7426 & -0.1684 & 0.6016 & 0.2205 \end{bmatrix} \\
\hat{\lambda}_4 &= 0.10 & \hat{e}_4' &= \begin{bmatrix} -0.1387 & 0.2821 & -0.1170 & 0.5682 & -0.7514 \end{bmatrix} \\
\hat{\lambda}_5 &= 0.03 & \hat{e}_5' &= \begin{bmatrix} -0.7018 & -0.0717 & 0.7087 & -0.0017 & -0.0090 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. p=5 olduğundan beş tane faktör elde edilir. Ancak uygulamada bu faktörlerden ilk birkaç tanesi kullanılacaktır. Bunun için faktör sayısının belirlenmesine ilişkin bazı kriterler vardır. Bunlardan biri ilk birkaç faktörün, toplam değişimin en az 2/3'nü açıklaması gerekir. Buradan m=2 tane ortak faktörün toplam örneklem varyansını açıklama oranı :

$$\frac{\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2}{p} = \frac{2.85 + 1.81}{5} = 0.93$$

olup yeterince yüksek bir değerdir.

Tahmini faktör ağırlıkları

$$\begin{aligned}
\hat{l}_{11} &= \sqrt{\hat{\lambda}_1}\hat{e}_{11} = \sqrt{2.85}\ (0.3315) \cong 0.56 \\
\hat{l}_{21} &= \sqrt{\hat{\lambda}_1}\hat{e}_{21} = \sqrt{2.85}\ (0.4602) \cong 0.78 \\
\hat{l}_{31} &= \sqrt{\hat{\lambda}_1}\hat{e}_{31} = \sqrt{2.85}\ (0.3821) \cong 0.65 \\
\hat{l}_{41} &= \sqrt{\hat{\lambda}_1}\hat{e}_{41} = \sqrt{2.85}\ (0.5560) \cong 0.94 \\
\hat{l}_{51} &= \sqrt{\hat{\lambda}_1}\hat{e}_{51} = \sqrt{2.85}\ (0.4726) \cong 0.80
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{l}_{12} &= \sqrt{\hat{\lambda}_2}\hat{e}_{12} = \sqrt{1.81}\ (0.6072) \cong 0.82 \\
\hat{l}_{22} &= \sqrt{\hat{\lambda}_2}\hat{e}_{22} = \sqrt{1.81}\ (-0.3900) \cong -0.52 \\
\hat{l}_{32} &= \sqrt{\hat{\lambda}_2}\hat{e}_{32} = \sqrt{1.81}\ (0.5565) \cong 0.75 \\
\hat{l}_{42} &= \sqrt{\hat{\lambda}_2}\hat{e}_{42} = \sqrt{1.81}\ (-0.0781) \cong -0.11 \\
\hat{l}_{52} &= \sqrt{\hat{\lambda}_2}\hat{e}_{52} = \sqrt{1.81}\ (-0.4042) \cong -0.54
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir ve buradan tahmini faktör ağırlıkları matrisi

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 0.56 & 0.82 \\ 0.78 & -0.52 \\ 0.65 & 0.75 \\ 0.94 & -0.11 \\ 0.80 & -0.54 \end{bmatrix}$$

yazılabilir.

Değişkenlerin ortak varyansları ise $i = 1,2,...,p$ için $h_i^2 = l_{i1}^{\ 2} + l_{i2}^{\ 2} + ... + l_{im}^{\ 2}$ olduğundan

$$h_1^2 = l_{11}^2 + l_{12}^2 = (0.56)^2 + (0.82)^2 = 0.98$$
$$h_2^2 = l_{21}^2 + l_{22}^2 = (0.78)^2 + (-0.52)^2 = 0.88$$
$$h_3^2 = l_{31}^2 + l_{32}^2 = (0.65)^2 + (0.75)^2 = 0.98$$
$$h_4^2 = l_{41}^2 + l_{42}^2 = (0.94)^2 + (-0.11)^2 = 0.89$$
$$h_5^2 = l_{51}^2 + l_{52}^2 = (0.80)^2 + (-0.54)^2 = 0.93$$

biçiminde elde edilir.

Değişkenler	Tahmini faktör ağırlıkları $\hat{l}_{ij} = \sqrt{\hat{\lambda}_j}\hat{e}_{ij}$		Değişkenlerin ortak faktör varyansları	Açıklanamayan özel varyanslar
	F_1	F_2	$\tilde{h}_i^2$	ψ_i
X_1	0.56	**0.82**	0.98	0.02
X_2	**0.78**	-0.52	0.88	0.12
X_3	0.65	**0.75**	0.98	0.02
X_4	**0.94**	-0.11	0.89	0.11
X_5	**0.80**	-0.54	0.93	0.07
Özdeğerler	2.85	1.81		
Toplam standartlaştırılmış örneklem varyansının birikimli oranı	0.571	0.932		

Değişkenlerin ortak faktörlerce açıklanan varyansları büyük olduğundan yani 1'yakın olduğundan iki faktör yeterlidir. Eğer bu değerler küçük olsaydı (0,50 den daha az) faktör sayısını artırılması önerilirdi.

Birinci faktör : X_2 , X_4, X_5

İkinci faktör : X_1, X_3

Buradan

$$\hat{L}\hat{L}'+\hat{\Psi}=\begin{bmatrix}0.56 & 0.82\\ 0.78 & -0.52\\ 0.65 & 0.75\\ 0.94 & -0.11\\ 0.80 & -0.54\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.56 & 0.78 & 0.65 & 0.94 & 0.80\\ 0.82 & -0.52 & 0.75 & -0.11 & -0.54\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.02 & 0 & 0 & 0 & 0\\ & 0.12 & 0 & 0 & 0\\ & & 0.02 & 0 & 0\\ & & & 0.11 & 0\\ & & & & 0.07\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0.97 & 0.44 & 0\\ & 1 & 0.11 & 0.79 & 0.91\\ & & 1 & 0.53 & 0.11\\ & & & 1 & 0.81\\ & & & & 1\end{bmatrix}$$

olup artıklar matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R-\left(\hat{L}\hat{L}'+\hat{\Psi}\right)=\begin{bmatrix}0 & 0.02 & -0.01 & -0.02 & 0.01\\ & 0 & 0.02 & -0.08 & -0.06\\ & & 0 & -0.03 & 0\\ & & & 0 & -0.02\\ & & & & 0\end{bmatrix}$$

Bu matrisin elemanlarının sıfıra yakın olmasını bekleriz.

Örnek 10 : Beş hisse senedinin 100 haftalık kar oranına ilişkin hisse senedi fiyat verileri daha önce verilmişti. Bu veriler için R matrisinden ilk iki örneklem temel bileşenleri elde edilmişti.

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0,577 & 0,509 & 0,387 & 0,462\\ & 1 & 0,599 & 0,389 & 0,322\\ & & 1 & 0,436 & 0,426\\ & & & 1 & 0,523\\ & & & & 1\end{bmatrix}$$

şeklinde verildiğine göre, *m*=1 ve *m*=2 alarak tahmini faktör ağırlıklarını, değişkenlere ilişkin ortak faktör varyanslarını ve açıklanamayan (hata) varyanslarını elde ediniz.

Çözüm 10 :

$$\hat{\lambda}_1 = 2.857 \quad \hat{e}_1^{'} = \begin{bmatrix} 0.464 & 0.457 & 0.47 & 0.422 & 0.421 \end{bmatrix}$$
$$\hat{\lambda}_2 = 0.809 \quad \hat{e}_2^{'} = \begin{bmatrix} -0.240 & -0.509 & -0.260 & 0.526 & 0.582 \end{bmatrix}$$

Tahmini faktör ağırlıkları

$$\begin{aligned}
\hat{l}_{11} &= \sqrt{\hat{\lambda}_1}\hat{e}_{11} = \sqrt{2.857}\ (0.464) \cong 0.784 \\
\hat{l}_{21} &= \sqrt{\hat{\lambda}_1}\hat{e}_{21} = \sqrt{2.857}\ (0.457) \cong 0.772 \\
\hat{l}_{31} &= \sqrt{\hat{\lambda}_1}\hat{e}_{31} = \sqrt{2.857}\ (0.470) \cong 0.794 \\
\hat{l}_{41} &= \sqrt{\hat{\lambda}_1}\hat{e}_{41} = \sqrt{2.857}\ (0.422) \cong 0.713 \\
\hat{l}_{51} &= \sqrt{\hat{\lambda}_1}\hat{e}_{51} = \sqrt{2.857}\ (0.421) \cong 0.712
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{l}_{12} &= \sqrt{\hat{\lambda}_2}\hat{e}_{12} = \sqrt{0.809}\ (-0.240) \cong -0.216 \\
\hat{l}_{22} &= \sqrt{\hat{\lambda}_2}\hat{e}_{22} = \sqrt{0.809}\ (-0.509) \cong -0.458 \\
\hat{l}_{32} &= \sqrt{\hat{\lambda}_2}\hat{e}_{32} = \sqrt{0.809}\ (-0.260) \cong -0.234 \\
\hat{l}_{42} &= \sqrt{\hat{\lambda}_2}\hat{e}_{42} = \sqrt{0.809}\ (0.526) \cong 0.473 \\
\hat{l}_{52} &= \sqrt{\hat{\lambda}_2}\hat{e}_{52} = \sqrt{0.809}\ (0.582) \cong 0.523
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

***m*=1 için**

Tahmini faktör ağırlıkları matrisi $\hat{L} = \begin{bmatrix} 0.784 \\ 0.772 \\ 0.794 \\ 0.713 \\ 0.712 \end{bmatrix}$ yazılabilir.

Değişkenlerin ortak varyansları ise $i = 1,2,...,p$ için $h_i^2 = l_{i1}^{\ 2} + l_{i2}^{\ 2} + ... + l_{im}^{\ 2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
h_1^2 &= l_{11}^{\ 2} = (0.784)^2 = 0.61 \\
h_2^2 &= l_{21}^{\ 2} = (0.772)^2 = 0.60 \\
h_3^2 &= l_{31}^{\ 2} = (0.794)^2 = 0.63 \\
h_4^2 &= l_{41}^{\ 2} = (0.713)^2 = 0.51 \\
h_5^2 &= l_{51}^{\ 2} = (0.712)^2 = 0.51
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

Değişkenler	Tahmini faktör ağırlıkları $\hat{l}_{ij} = \sqrt{\hat{\lambda}_j}\hat{e}_{ij}$	Değişkenlerin ortak faktör varyansları	Açıklanamayan özel varyanslar
	F_1	$\tilde{h}_i^2$	ψ_i^2
X_1	0.784	0.61	0.39
X_2	0.772	0.60	0.40
X_3	0.794	0.63	0.37
X_4	0.713	0.51	0.49
X_5	0.712	0.51	0.49
Toplam varyansı birikimli açıklama oranı	0.571		

***m*=2 için**

Tahmini faktör ağırlıkları matrisi

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 0.784 & -0.216 \\ 0.772 & -0.458 \\ 0.794 & -0.234 \\ 0.713 & 0.473 \\ 0.712 & 0.523 \end{bmatrix}$$

yazılabilir.

Değişkenlerin ortak varyansları ise $i = 1,2,\ldots,p$ için $h_i^2 = l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + \ldots + l_{im}^2$ olduğundan

$$h_1^2 = l_{11}^2 + l_{12}^2 = (0.784)^2 + (-0.216)^2 = 0.66$$
$$h_2^2 = l_{21}^2 + l_{22}^2 = (0.772)^2 + (-0.458)^2 = 0.81$$
$$h_3^2 = l_{31}^2 + l_{32}^2 = (0.794)^2 + (-0.234)^2 = 0.69$$
$$h_4^2 = l_{41}^2 + l_{42}^2 = (0.713)^2 + (0.473)^2 = 0.73$$
$$h_5^2 = l_{51}^2 + l_{52}^2 = (0.712)^2 + (0.523)^2 = 0.78$$

biçiminde elde edilir

	Tahmini faktör ağırlıkları $\hat{l}_{ij} = \sqrt{\hat{\lambda}_j}\hat{e}_{ij}$		Değişkenlerin ortak faktör varyansları	Açıklanamayan özel varyanslar
Değişkenler	F_1	F_2	$\tilde{h}_i^2$	ψ_i^2
X_1	0.784	-0.216	0.66	0.34
X_2	0.772	-0.418*	0.81	0.19
X_3	0.794	-0.234	0.69	0.31
X_4	0.713	0.473*	0.73	0.27
X_5	0.712	0.523*	0.78	0.22
Özdeğerler	2.857	0.809		
Toplam varyansı birikimli açıklama oranı	0.571	0.733		

İki faktörlü çözümün toplam varyansı açıklama oranı tek faktörlü çözüme göre daha fazladır. Burada

X_1 in iki faktörle açıklanma oranı %66 dır.

X_2 in iki faktörle açıklanma oranı %81 dır.

X_3 in iki faktörle açıklanma oranı %69 dır.

X_4 in iki faktörle açıklanma oranı %73 dır.

X_5 in iki faktörle açıklanma oranı %78 dır.

m=2 faktör çözümü için artık matrisi:

$$R - \left(\hat{L}\hat{L}' + \hat{\Psi}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -0.127 & -0.164 & -0.069 & 0.017 \\ & 0 & -0.122 & -0.055 & 0.012 \\ & & 0 & -0.019 & -0.017 \\ & & & 0 & -0.232 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir.