12. HAFTA

Örnek 23 : Π_1 ve Π_2 kitlelerinden alınan p=2 için, $n_1 = n_2 = 3$ birimlik rasgele örneklemler ve betimsel istatistikler aşağıda verilmiştir. Eşit prior ve eşit hatalı sınıflandırma maliyetleri için hata oranı tahminlerini elde ediniz.

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 12 & 10 & 8 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{\bar{x}}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} \quad , \quad S_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{\bar{x}}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \quad , \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Çözüm 23 : Hata oranı tahmini $APER = \dfrac{n_{12} + n_{21}}{n_1 + n_2}$ formülü ile elde edilir. Burada

n_{12} : Π_1 deki birimlerden Π_2 ye hatalı sınıflandırılanların sayısı

n_{21} : Π_2 deki birimlerden Π_1 e hatalı sınıflandırılanların sayısı

biçiminde tanımlıdırlar. O halde hatalı sınıflandırılan birim sayılarını tespit etmeliyiz. Bunun için öncelikle sınıflandırma bölgelerini belirleyelim. Bu bölgeler $y = \left(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2\right)' \Sigma^{-1} \underline{x}$ ifadesi yardımıyla

$$R_1(y):\ y \geq \frac{1}{2}\left(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2\right)' \Sigma^{-1} \left(\underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2\right)$$
$$R_2(y):\ y < \frac{1}{2}\left(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2\right)' \Sigma^{-1} \left(\underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2\right)$$

biçiminde elde edilmektedir. Bu formüllerin örneklem değerlerini bulalım:

$$S_{pooled} = \frac{(n_1 - 1)S_1 + (n_2 - 1)S_2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{2S_1 + 2S_2}{3 + 3 - 2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$S_{pooled}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
y &= \underline{\hat{l}}'\underline{\mathrm{x}} \\
&= \left(\underline{\overline{\mathrm{x}}}_1 - \underline{\overline{\mathrm{x}}}_2\right) S_{pooled}^{-1}\ \underline{\mathrm{x}} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{x_1}{3} + \frac{2x_2}{3}
\end{aligned}
$$

Buradan $\underline{\hat{l}}' = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$ olduğu açıktır.

Diğer yandan,

$$
\begin{aligned}
\hat{m} &= \frac{1}{2}\left(\underline{\overline{\mathrm{x}}}_1 - \underline{\overline{\mathrm{x}}}_2\right) S_{pooled}^{-1} \left(\underline{\overline{\mathrm{x}}}_1 + \underline{\overline{\mathrm{x}}}_2\right) \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \end{bmatrix} \\
&= 4.5
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan bölgeler

$$
\begin{aligned}
R_1 &: \ y \geq 4.5 \\
R_2 &: \ y < 4.5
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Şimdi bu örneklemlerdeki birimlerden yanlış sınıflandırılanları bulalım:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \underline{\hat{l}}'\underline{\mathrm{x}}_0 \\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \underline{\mathrm{x}}_0
\end{aligned}
$$

✓ $y_{011} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix} = 7.83 > 4.5 \ \Rightarrow \ \Pi_1$

✓ $y_{012} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} = 5.33 > 4.5 \ \Rightarrow \ \Pi_1$

X $y_{013} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} = 4.33 < 4.5 \ \Rightarrow \ \Pi_2$ halbuki $\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \Pi_1$

✓ $y_{021} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 3 < 4.5 \ \Rightarrow \ \Pi_2$

X $y_{022} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix} = 5 > 4.5 \;\Rightarrow\; \Pi_1$ halbuki $\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix} \Rightarrow \Pi_2$

✓ $y_{023} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} = 2 < 4.5 \;\Rightarrow\; \Pi_2$

		Sınıflandırılan Kitle	
		Π_1	Π_2
Doğru Kitle	Π_1	2	1
	Π_2	1	2

$$APER = \frac{n_{12} + n_{21}}{n_1 + n_2} = \frac{1+1}{3+3} = \frac{2}{6} = 0.33$$

elde edilir.

Şimdi Π_1 kitlesinden birinci gözlem $x_{11}^{'} = \begin{bmatrix}2 & 12\end{bmatrix}$ atılsın. Bu durumda

$$X_{1H} = \begin{bmatrix}4 & 3\\10 & 8\end{bmatrix} \quad , \quad \underline{\bar{x}}_{1H} = \begin{bmatrix}3.5\\9\end{bmatrix}$$

$$S_{H,pooled} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2.5 & -1\\-1 & 10\end{bmatrix} \quad , \quad S_{H,pooled}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}10 & 1\\1 & 2.5\end{bmatrix}$$

$$\hat{y} = \underline{\hat{l}'}_H \underline{x}_H = \left(\underline{\bar{x}}_{1H} - \underline{\bar{x}}_2\right) S_{H,pooled}^{-1} \underline{x}_H$$

$$\hat{m}_H = \frac{1}{2}\left(\underline{\bar{x}}_{1H} - \underline{\bar{x}}_2\right) S_{H,pooled}^{-1}\left(\underline{\bar{x}}_{1H} + \underline{\bar{x}}_2\right)$$

Kare uzaklığı $\underline{\bar{x}}_{1H}$ e göre

$$\begin{aligned}\underline{\bar{x}}_{1H} &= \left(\underline{x}_H - \underline{\bar{x}}_{1H}\right)^{'} S_{H,pooled}^{-1}\left(\underline{x}_H - \underline{\bar{x}}_{1H}\right)\\ &= \begin{bmatrix}2-3.5 & 12-9\end{bmatrix}\frac{1}{8}\begin{bmatrix}10 & 1\\1 & 2.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2-3.5\\12-9\end{bmatrix}\\ &= 4.5\end{aligned}$$

Kare uzaklığı $\underline{\bar{x}}_2$ e göre

$$\begin{aligned}\underline{\bar{x}}_2 &= \left(\underline{x}_H - \underline{\bar{x}}_2\right)' S^{-1}_{H,pooled}\left(\underline{x}_H - \underline{\bar{x}}_2\right)\\ &= \begin{bmatrix}2-4 & 12-7\end{bmatrix}\frac{1}{8}\begin{bmatrix}10 & 1\\ 1 & 2.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2-4\\ 12-7\end{bmatrix}\\ &= 10.3\end{aligned}$$

$\underline{x}_H$ den $\underline{\bar{x}}_{1H}$ ' e uzaklık, $\underline{\bar{x}}_{1H}$ den $\underline{\bar{x}}_2$ ' e uzaklıktan daha küçük olduğundan $\underline{x}_H$, Π_1 'e sınıflandırılır. Bu durumda doğru sınıflandırma yapılmıştır. Benzer biçimde,

$$\begin{aligned}\underline{x}_H' &= \begin{bmatrix}4 & 10\end{bmatrix} \Rightarrow \Pi_2\\ \underline{x}_H' &= \begin{bmatrix}3 & 8\end{bmatrix} \Rightarrow \Pi_2\\ \underline{x}_H' &= \begin{bmatrix}5 & 7\end{bmatrix} \Rightarrow \Pi_2\\ \underline{x}_H' &= \begin{bmatrix}3 & 9\end{bmatrix} \Rightarrow \Pi_1\\ \underline{x}_H' &= \begin{bmatrix}4 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow \Pi_2\end{aligned}$$

sınıflandırma yapılır. Buradan $n_{12} = 2$ ve $n_{21} = 1$ elde edilir. Böylece beklenen gerçek hata oranının tahmini $\hat{E}\left(AER\right) = \dfrac{n_{12} + n_{21}}{n_1 + n_2} = \dfrac{2+1}{3+3} = 0.5$ olarak elde edilir. Daha önce elde edilen $APER = 0.33$ değeri, performansın iyimser ölçüsüdür. Örneklemin hacmi geniş olduğunda $APER$ ile $\hat{E}\left(AER\right)$ arasındaki fark çok büyük olmaz.

Örnek 24 : Bir hava yolu firmasını tercih eden yerli (Π_1 Kitlesi) ve yabancı (Π_2 Kitlesi) yolcuların iki özelliğine ilişkin kitle ortalama vektörleri ve ortak varyans-kovaryans matrisi

$$\underline{\mu}_1 = \begin{bmatrix}5\\ 1\end{bmatrix}, \ \underline{\mu}_2 = \begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} \ ve \ \Sigma = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

olmak üzere normal dağılmaktadır. Sınıflandırma kuralını elde ederek, $\underline{x}_0' = \begin{bmatrix}4 & 2\end{bmatrix}$ ölçümüne sahip yolcunun yerli mi yabancı mı olup olmadığına karar veriniz. Optimal hata oranlarını hesaplayınız.

Çözüm 24 :

Prior olasılıklar verilmediğinden eşit kabul edilebilir.

Hatalı sınıflandırma maliyetleri verilmediğinden eşit kabul edilebilir.

Aynı varyans-kovaryans matrisine sahip iki normal kitle, eşit prior olasılık ve eşit hatalı sınıflandırma maliyetine sahip ise Minimum ECM kuralı Fisher sınıflandırma kuralına eşdeğerdir.

Π_1 : Yerli yolcu

Π_2 : Yabancı yolcu

Öncelikle sınıflandırma kuralını belirleyelim. Bu bölgeler $Y = \left(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2\right)' \Sigma^{-1} \underline{X}$ ifadesi yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} Y &= \underline{l}' \underline{X} \\ &= \left(\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2\right)' \Sigma^{-1} \underline{X} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \\ &= 3X_1 - 3X_2 \end{aligned}$$

$$m = \frac{1}{2} \underline{l}' \left(\underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2\right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{15}{4}$$

Sınıflandırma kuralı :

$y_0 = 3x_{01} - 3x_{02} \geq \frac{15}{4}$ ise $\underline{x}_0 = \left[x_{01} \;\; x_{02}\right]'$ Π_1 e atanır.

$y_0 = 3x_{01} - 3x_{02} < \frac{15}{4}$ ise $\underline{x}_0 = \left[x_{01} \;\; x_{02}\right]'$ Π_2 ye atanır.

$\underline{x}_0 = \left[4 \;\; 3\right]'$ için atama kuralından:

$y_0 = 3*4 - 3*3 = 3 < \frac{15}{4}$ olduğundan $\underline{x}_0 = \left[4 \;\; 3\right]'$ Π_2 ye atanır.

Ayrıca

$$\sigma^2{}_Y = \Delta^2 = \underline{l}'\Sigma\underline{l} = [3\ -3]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = 9$$

$OER = \min TPM = \Phi\left\{\frac{-\Delta}{2}\right\} = \Phi\left\{\frac{-3}{2}\right\} = 0.0668$ dir. (Teori dersinde elde edilmişti)

Örnek 25 : Π_1 ve Π_2 sırasıyla $N_2(\mu_1, \Sigma_1)$ ve $N_2(\mu_2, \Sigma_2)$ kitleleri olsun. Kitle parametreleri

$$\underline{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}, \ \underline{\mu}_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \end{bmatrix}, \ \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 32 \end{bmatrix} ve \ \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 20 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilmiş olsun. $c(1|2) = 10$, $c(2|1) = 73$ ve $p_1 = p_2$ olduğu bilinmektedir.

Sınıflandırma bölgelerini bulunuz ve $\underline{x}_0' = \begin{bmatrix} 30 & 35 \end{bmatrix}$ gözlemi için atama yapınız.

Çözüm 25 : $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ olduğundan sınıflandırma bölgeleri

$$R_1 : -\frac{1}{2}\underline{x}'\left(\Sigma_1^{-1} - \Sigma_2^{-1}\right)\underline{x} + \left(\underline{\mu}'_1\Sigma_1^{-1} - \underline{\mu}'_2\Sigma_2^{-1}\right)\underline{x} - k \geq \ln\left[\left(\frac{c(1|2)}{c(2|1)}\right)\frac{p_2}{p_1}\right]$$

$$R_2 : -\frac{1}{2}\underline{x}'\left(\Sigma_1^{-1} - \Sigma_2^{-1}\right)\underline{x} + \left(\underline{\mu}'_1\Sigma_1^{-1} - \underline{\mu}'_2\Sigma_2^{-1}\right)\underline{x} - k < \ln\left[\left(\frac{c(1|2)}{c(2|1)}\right)\frac{p_2}{p_1}\right]$$

$$k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|}\right) + \frac{1}{2}\left(\underline{\mu}'_1\Sigma_1^{-1}\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}'_2\Sigma_2^{-1}\underline{\mu}_2\right)$$

ile elde edilir.

$$\Sigma_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}0740 & -0{,}0277 \\ -0{,}0277 & 0{,}0416 \end{bmatrix} \ \Sigma_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}0980 & 0{,}1372 \\ 0{,}1372 & 0{,}3921 \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{432}{51}\right) + \frac{1}{2}(-315.0803) = -156.4719$$

$$\ln\left[\left(\frac{c(1|2)}{c(2|1)}\right)\frac{p_2}{p_1}\right] = -1.9879$$

Buradan bölgeler :

$$R_1 : -\frac{1}{2}\underline{x}'\begin{pmatrix} -0.0240 & -0.1650 \\ -0.1650 & -0.3505 \end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix} -4.0877 & -10.8292 \end{pmatrix}\underline{x} \geq -158.4598$$

$$R_2 : -\frac{1}{2}\underline{x}'\begin{pmatrix} -0.0240 & -0.1650 \\ -0.1650 & -0.3505 \end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix} -4.0877 & -10.8292 \end{pmatrix}\underline{x} < -158.4598$$

eşitsizlikleri ile elde edilir.

$$-\frac{1}{2}\underline{x_0}'\begin{pmatrix} -0.0240 & -0.1650 \\ -0.1650 & -0.3505 \end{pmatrix}\underline{x_0} + \begin{pmatrix} -4.0877 & -10.8292 \end{pmatrix}\underline{x_0} = -102.9105 > -158.4598$$

olduğundan Π_1 'e atanır.

Örnek 26: Π_1 : üzerine binilerek kesme yapan araca sahip olanların grubunu ve Π_2 : böyle araca sahip olmayanların grubunu göstersin. Bir satış kampanyasında en iyi satış profilini belirlemek için bu tür aleti üreten firmalar, $x_1 : gelir$ ve $x_2 : sahip\ oldugu\ arazi\ büyüklügü$ verilerine bağlı bu tür araca sahip olan ve olmayan ailelerin sınıfıyla ilgilenmektedir. Her bir kitleden 12 birimlik rasgele örneklemler alınmış ve elde edilen değerler aşağıdadır:

	Π_1 grubu		Π_2 grubu	
Gözlem sayısı	x_1	x_2	x_1	x_2
1	20,0	9,2	25,0	9,8
2	28,5	8,4	17,6	10,4
3	21,6	10,8	21,6	8,6
4	20,5	10,4	14,4	10,2
5	29,0	11,8	28,0	8,8
6	36,7	9,6	16,4	8,8
7	36,0	8,8	19,8	8,0
8	27,6	11,2	22,0	9,2
9	23,0	10,0	15,8	8,2
10	31,0	10,4	11,0	9,4

$$\bar{\underset{\sim}{x}}_1 = \begin{bmatrix} 27.39 \\ 10.06 \end{bmatrix},\ \bar{\underset{\sim}{x}}_2 = \begin{bmatrix} 19.16 \\ 9.14 \end{bmatrix},\quad S_1 = \begin{bmatrix} 36,954 & -1,412 \\ -1,412 & 1,156 \end{bmatrix},\ S_2 = \begin{bmatrix} 26,362 & -0,673 \\ -0,673 & 0,658 \end{bmatrix}$$

$$S_{pooled} = \begin{bmatrix} 31.6585 & -1.0432 \\ -1.0432 & 0.9071 \end{bmatrix} \quad ve \quad S^{-1}{}_{pooled} = \begin{bmatrix} 0.0328 & 0.0378 \\ 0.0378 & 1.1458 \end{bmatrix}$$

olsun. Buna göre $\underset{\sim}{x}_0' = \begin{bmatrix} 27 & 10 \end{bmatrix}$ için atama yapınız.

Çözüm 26 :

$$\begin{aligned} y &= \underset{\sim}{l}'\underset{\sim}{x} \\ &= \left(\overline{\underset{\sim}{x}}_1 - \overline{\underset{\sim}{x}}_2\right) S^{-1}_{pooled}\underset{\sim}{x} \\ &= \begin{bmatrix} 8.23 & 0.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0328 & 0.0378 \\ 0.0378 & 1.1458 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 0.3049\mathrm{x}_1 + 1.3649\mathrm{x}_2 \end{aligned}$$

Buradan $\underset{\sim}{l}' = \begin{bmatrix} 0.3049 & 1.3649 \end{bmatrix}$ olduğu açıktır.

Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \frac{1}{2}\left(\overline{\underset{\sim}{x}}_1 - \overline{\underset{\sim}{x}}_2\right) S^{-1}_{pooled} \left(\overline{\underset{\sim}{x}}_1 + \overline{\underset{\sim}{x}}_2\right) \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0.3049 & 1.3649 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 46.55 \\ 19.2 \end{bmatrix} \\ &= 20.2005 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan bölgeler

$$R_1 : \; y \geq 20.2005$$
$$R_2 : \; y < 20.2005$$

olarak elde edilir.

$$y_0 = \underset{\sim}{l}'\underset{\sim}{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.3049 & 1.3649 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 27 \\ 10 \end{bmatrix} = 21.8824 > 20.2005$$ olduğundan Π_1 ’e atanır.

Örnek 27 :

Aşağıda verilen değerlere göre minimum ECM yöntemini kullanarak $\underline{x}_0$ gözlemini sınıflandırınız.

		Doğru kitle	
		Π_1	Π_2
Sınıflandırılankitle	Π_1	0	$c(1\|2)=6$
	Π_2	$c(2\|1)=5$	0
		$p_1=0.3$	$p_2=0.7$
		$f_1(\underline{x}_0)=0.8$	$f_2(\underline{x}_0)=0.5$

Çözüm 27 :

k=1 için $p_2 f_2(\underline{x}_0)c(1|2)=0.7*0.5*6=2.1$

k=2 için $p_1 f_1(\underline{x}_0)c(2|1)=0.3*0.8*5=1.2$

En küçük değer k=2 için karşımıza çıktığından $\underline{x}_0$, Π_2'ye atanır.

Örnek 28: Π_1 ve Π_2 kitleleri $Uniform(0,1)$ ve $Uniform(1,2)$ olmak üzere, bu iki gruptan birer gözlem alınsın ve sırasıyla X_1 , X_2 ile gösterilsin. Prior olasılıklar $p_1 = p_2$ olsun. Sınıflandırma kuralı ve bölgeler aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$R_1 \,:\, X \le \frac{X_1+X_2}{2}$$

$$R_2 \,:\, X > \frac{X_1+X_2}{2}$$

Bu durumda AER (actual error rate) ve $E(AER)$'i hesaplayınız.

Çözüm 28: $C=\dfrac{X_1+X_2}{2}$ olsun.

$$AER = \frac{1}{2}P\left(X > C \mid X \in \Pi_1\right) + \frac{1}{2}P\left(X < C \mid X \in \Pi_2\right)$$
$$= \begin{cases} (1-C)\big/2 & , \quad C \le 1 \\ (C-1)\big/2 & , \quad C > 1 \end{cases}$$
$$= \frac{1}{2}\left|C-1\right|$$

elde edilir. Buradan $AER = \frac{1}{2}\left|C-1\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{X_1+X_2}{2}-1\right|$ bir rasgele değişkendir.

Bu rasgele değişkeni $G = AER$ ile gösterelim. G rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_G(g) = \begin{cases} 8\left(1-4g\right) & , \quad 0 \le g \le \frac{1}{4} \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olup buradan $E\left(G\right) = E\left(AER\right) = 1/12$ bulunur.

Örnek 29 : Π_1 ve Π_2 sırasıyla $N_2\left(\mu_1,\Sigma\right)$ ve $N_2\left(\mu_2,\Sigma\right)$ kitleleri olsun. Kitle parametreleri

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \ , \ \mu_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ ve \ \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilmiş olsun. **(ÖDEV)** .Buna göre

a) Fisher’in lineer diskriminant fonksiyonunun elde ediniz.

$$Y = \underline{l}'\underline{X} = \left[\mu_1 - \mu_1\right]'\Sigma^{-1}\underline{X}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$
$$= 2X_1 + X_2$$

b) Y’nin iki grup için ortalamalarını bulunuz.

$$\mu_{1Y} = \underline{l}'\mu_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 9$$

$$\mu_{2Y} = \underline{l}'\mu_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$