BÖLÜM 1

TANIMLAR ve TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Polinom Fonksiyonlar

Tanım 1.1. $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, ...\}$ ve $a_0, a_1, ..., a_n$ ler de $a_n \neq 0$ olmak üzere, sabit sayılar olsunlar.

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

şeklinde tanımlanan $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna "*n. dereceden bir polinom* (çok terimli)" denir. Burada $a_0, a_1, ..., a_n$ sayılarına polinomun katsayıları adı verilir. Eğer $a_n = 1$ ise p_n polinomuna "*monik polinom*" denir. x değişkeninin ve katsayıların reel ya da kompleks olmasına göre p_n polinomu reel polinom ya da kompleks polinom olarak adlandırılır.

Polinomların sahip oldukları bazı özellikler aşağıda verilmektedir.
i) Bir polinomun bir sayı ile çarpımı yine bir polinomdur.
ii) Herhangi iki polinomun toplamı, farkı ve çarpımı yine bir polinomdur.
iii) İki polinomun bileşkesi yine bir polinomdur.
iv) Reel katsayılı n. dereceden bir p_n polinomunun en fazla n tane reel kökü vardır.
v) n. dereceden bir $p_n(x)$ polinomu $x = a$ noktasında m katlı bir sıfır yerine (köküne) sahip ise, o takdirde her $x \in \mathbb{R}$ için

$$p_n(x) = (x-a)^m r(x) \quad , \quad r(a) \neq 0$$

olacak şekilde $(n-m)$. dereceden bir r polinomu vardır.

1.2. Ortogonal Fonksiyonlar Sistemi

Tanım 1.2. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\omega(x)$, I da tanımlı pozitif bir fonksiyon olsun. $\phi_m(x)$ ve $\phi_n(x)$ fonksiyonları I aralığında reel değerli ve integrallenebilen fonksiyonlar olsunlar. $m, n \in \mathbb{N}_0$

olmak üzere $m \neq n$ için

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_I \phi_m(x)\,\phi_n(x)\,\omega(x)\,dx = 0$$

sağlanıyorsa $\phi_0(x),\ \phi_1(x),\ \phi_2(x), ...$ reel fonksiyonlar sistemine I aralığında $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre *ortogonal bir sistem* teşkil ediyor denir. $m = n$ durumunda ise ϕ_n nin normu

$$\|\phi_n\| = \left[\int_I w(x)\,\phi_n^2(x)\,dx\right]^{1/2} \qquad ; \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

ile verilir. Eğer $n = 0, 1, 2, ...$ için $\|\phi_n\| = 1$ ise o takdirde bu sisteme *ortonormal sistem* denir. Yani,

$$\int_I w(x)\,\phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ 1 & , \quad m = n \end{cases}$$

ise $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$,..., $\phi_n(x)$,... fonksiyon sistemi ortonormaldir.

Örnek 1. $\{\cos n\theta\}$, $(n = 0, 1, 2, ...)$ fonksiyonlar sistemi

$$\int_0^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta \; d\theta = 0 \quad , \quad m \neq n \; ; \quad m, n = 0, 1, 2, ...$$

ortogonallik özelliğini sağlar. Yani, $\{1, \cos\theta, \cos 2\theta, ..., \cos n\theta, ...\}$ fonksiyon sistemi $(0, \pi)$ aralığında ortogonal bir fonksiyon dizisi oluşturur.

$$\cos\,(n+1)\,\theta + \cos\,(n-1)\,\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$$

bağıntısı ve tümevarım kullanılarak $\cos n\theta$ nın $x = \cos\theta$ 'nın terimlerinde başkatsayısı $a_n = 2^{n-1}$ $(a_0 = 1)$ olan n-yinci dereceden bir polinom olduğu kolaylıkla görülür. Bu polinom $T_n\,(x)$ birinci çeşit Tchebyshev polinomudur. $x = \cos\theta$ değişken değiştirmesi yapılarak, $T_n\,(x)$'ler için aşağıdaki ortogonallik bağıntısı elde edilir

$$\int_{-1}^{1} T_n\,(x)\,T_m\,(x) \;\; \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \; , \quad m \neq n. \tag{1.1}$$

Burada $T_n(x) = \cos n\theta = \cos(n \cos^{-1} x)$, $-1 \leq x \leq 1$ formunda olup trigonometrik eşitlikler kullanılarak bu polinomların birkaç terimi aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \ , \ \ T_1(x) = \cos\theta = x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \ \ , \ \ T_3(x) = 4x^3 - 3x \ , ... \end{aligned}$$

(1.1) bağıntısı gösterir ki $\{T_n(x)\}_0^\infty$ Tchebyshev polinomları $(-1,1)$ aralığında $(1-x^2)^{-1/2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal bir polinom dizisi oluşturur.