BÖLÜM 2

ORTOGONAL POLİNOMLARIN ÖZELLİKLERİ

2.1. Ortogonal Polinomlar İçin Rekürans Formülü

Teorem 2.1. (a, b) aralığında $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olan n. dereceden $\phi_n(x)$ polinom ailesi

$$\phi_{n+1}(x) - (xA_n + B_n)\,\phi_n(x) + C_n\,\phi_{n-1}(x) = 0 \quad , \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.1}$$

üç terimli rekürans formülünü gerçekler. Burada

$$A_n = \frac{k_{n+1}}{k_n}\,,\; C_n = \frac{A_n}{A_{n-1}},\; C_0 = 0 \tag{2.2}$$

ile verilir ve $\phi_n(x) = k_n x^n + ...$ formundadır.

İspat. Uygun α_k ve β_k lar için

$$\phi_{n+1}(x) - xA_n\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \beta_k\ \phi_k(x)$$

eşitliği sağlanır. Ortonormallik özelliği kullanılırsa

$$-A_n\left(x\phi_n, \phi_j\right) = \beta_j\ , \quad j \leq n \tag{2.3}$$

elde edilir. (1.2) ortogonallik bağıntısından

$$\left(x\phi_n, \phi_j\right) = \int_a^b w\,(x)\,x\phi_n\,(x)\,\phi_j\,(x)\,dx = \left(\phi_n, x\phi_j\right) = 0\ , \quad j \leq n-2$$

gerçeklenir, çünkü $x\phi_j$ en fazla $(n-1)$-ci dereceden bir polinomdur. Bu da gösterir ki,

$$\beta_0 = \beta_1 = ... = \beta_{n-2} = 0$$

sağlanır. $\beta_n = B_n$ ve $\beta_{n-1} = -C_n$ olarak alınırsa (2.1) rekürans bağıntısının gerçeklendiği görülür. Şimdi de C_n nin değerini elde edelim. (2.3) den

$$C_n = A_n \left(x\phi_n, \phi_{n-1}\right) = A_n \left(\phi_n, x\phi_{n-1}\right) \tag{2.4}$$

sağlanır.

$$x\phi_{n-1} = k_{n-1}x^n + ... = \frac{k_{n-1}}{k_n}\left[k_n x^n + ...\right]$$

olup köşeli parantezin içindeki ifade

$$x\phi_{n-1} = \frac{1}{A_{n-1}}\left[\phi_n\left(x\right) + \sum_{j=0}^{n-1}\gamma_j\ \phi_j(x)\right]$$

formunda yazılabilir. Bu ifade (2.4) de dikkate alınırsa

$$C_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}\left(\phi_n,\ \phi_n + \sum_{j=0}^{n-1}\gamma_j\ \phi_j\right) = \frac{A_n}{A_{n-1}}$$

elde edilir.

Bilinen bazı ortogonal polinom ailelerinin sağladığı üç terimli rekürans formülleri aşağıda verilmektedir.

I) Jacobi Polinomları: $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$

$$2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) - (2n+\alpha+\beta+1)(\alpha^2-\beta^2)(2n+\alpha+\beta)_3\, x\, P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$+2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = 0$$

Not: $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere $(z)_0 = 1$ ve $(z)_r = z(z+1)...(z+r-1)$; $r = 1, 2, ...$ Pochhammer sembolünü gösterir.

II) I. Tür Tchebycheff Polinomları: $T_n(x)$

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$$

III) Legendre Polinomları: $P_n^{(0,0)}(x) = P_n(x)$

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

IV) Genelleştirilmiş Laguerre Polinomları: $L_n^{(\alpha)}(x)$

$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (x - 2n - 1 - \alpha)L_n^{(\alpha)}(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0$$

V) Hermite Polinomları: $H_n(x)$

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

VI) Hermite Polinomları: $He_n(x)$

$$He_{n+1}(x) - xHe_n(x) + nHe_{n-1}(x) = 0$$