2.4. Ortogonal Polinomların Sıfırları

Teorem 2.4. $I=[a,b]$ aralığında $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan polinomların bir sistemi $\{\phi_n(x)\}, n=0,1,...$ olsun. Sistemdeki her $\phi_n(x)$ polinomunun (a,b) aralığı içinde n tane basit reel kökü vardır.

Teorem 2.5. $[a,b]$ aralığında $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan polinomların bir sistemi $\{\phi_n(x)\}, n=0,1,...$ olsun. $\phi_n(x)$ ve $\phi_{n+1}(x)$ polinomlarının sıfırları birbirini ayırır.

Örnek 1. $[-1,1]$ aralığında $w(x)=1$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olan $\phi_n(x)$, $n=0,1,2,...$ polinom ailesinin ilk üç elemanını bulunuz ve bu polinomların tüm köklerinin reel olduğunu ve de $(-1,1)$ aralığında bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm: **i)** $\phi_0(x)=A_0$ olsun.

$$\begin{aligned}\|\phi_0\|^2 &= \int_{-1}^{1} w(x)\,\phi_0^2(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 1.A_0^2\,dx = 1\\ &\Rightarrow\ 2A_0^2 = 1 \Rightarrow A_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

olup $\phi_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ dir.

ii) $\phi_1(x)=A_1x+B_1$ formunda birinci dereceden polinomu seçilir ve

$$\begin{aligned}(\phi_0,\phi_1) &= \int_{-1}^{1} w(x)\,\phi_0(x)\,\phi_1(x)\,dx = 0,\\ \|\phi_1\|^2 &= \int_{-1}^{1} w(x)\,\phi_1^2(x)\,dx = 1\end{aligned}$$

bağıntılarından yararlanılırsa $\phi_1(x)=\sqrt{\dfrac{3}{2}}x$ olarak bulunur.

iii) İkinci dereceden polinom $\phi_2(x) = A_2x^2 + B_2x + C_2$ olsun.

$$\begin{aligned}
(\phi_0, \phi_2) &= \int_{-1}^{1} w(x)\,\phi_0(x)\,\phi_2(x)\,dx = 0 \\
(\phi_1, \phi_2) &= \int_{-1}^{1} w(x)\,\phi_1(x)\,\phi_2(x)\,dx = 0 \\
\|\phi_2\|^2 &= \int_{-1}^{1} w(x)\,\phi_2^2(x)\,dx = 1
\end{aligned}$$

eşitliklerinin kullanılmasıyla $\phi_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\,(1-3x^2)$ olarak bulunur. Şimdi bu polinomların köklerini (sıfırlarını) inceleyelim.

i) $\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sıfırıncı dereceden polinom olup köklerinin sayısı sıfırdır. Yani köke sahip değildir.

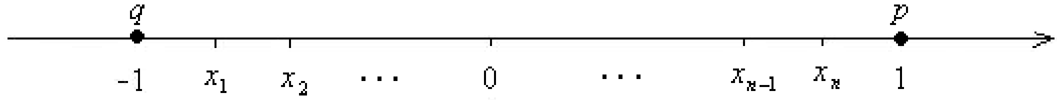
ii) $\phi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ reel kök olup $x_1 \in (-1, 1)$ dir.

iii) $\phi_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\,(1-3x^2) \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \in \mathbb{R}$ olup $x_{1,2} \in (-1, 1)$ dir.

2.5. Jacobi Polinomlarının Sıfırlarının Fiziksel Yorumu

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomları Teorem 2.4 den $(-1, 1)$ aralığında n-tane reel köke sahiptir. Jacobi polinomlarının bu sıfırları potansiyel enerji teorisinde uygulamaya sahiptir. Şimdi bu uygulamadan kısaca bahsedelim.

Kabul edelim ki p ve q yükleri sırasıyla $(-1, 1)$ aralığının uçları olan $+1$ ve -1 noktalarına yüklenmiş iki pozitif yük olsunlar. n tane birim pozitif yük de $(-1, 1)$ aralığındaki $x_1, x_2, ..., x_n$ noktalarına dağıtılsın.



Bu sistemin denge konumunda olabilmesi için $\{x_i\}$ cümlesinin elemanlarının Jacobi polinomlarının sıfırlarına karşılık gelmesi gerekmektedir. Fiziksel olarak potansiyel teoriden,

$$T = \prod_{k=1}^{n} (1-x_k)^p (1+x_k)^q \prod_{\substack{v,u=1 \\ v<u}}^{n} |x_v - x_u|$$

olmak üzere, $\ln T^{-1}$ sistemin potansiyel enerjisini gösterir. Denge durumunun oluşması için $w = \ln T^{-1}$ potansiyel enerji fonksiyonu bir minumuma sahip olmalı, yani

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\ln T^{-1}\right) = 0 \qquad ; \qquad j = 1, 2, ..., n$$

sağlanmalıdır. Buradan gerekli işlemler yapılırsa

$$\left(1-x^2\right) f^{''}(x) + [2(q-p) - 2(q+p)x]\, f^{'}(x) + n(n+2q+2p-1) f(x) = 0$$

denklemine ulaşılır. Bu denklemin polinom çözümleri $P_n^{(2p-1,2q-1)}(x)$ Jacobi polinomları olup $x_1, x_2, ..., x_n$ ler de bu polinomların köklerine karşılık gelmektedir. Buradan görülür ki, fiziksel sistemin dengelendiği $x_1, x_2, ..., x_n$ noktaları Jacobi polinomlarının sıfırlarına karşılık gelir.