## 2.7. Ortogonal Polinomların Normları

$[a,b]$ aralığında $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $\{\phi_n(x)\}$ polinomları

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b w(x)\,\phi_m(x)\,\phi_n(x)\;dx = 0 \quad ; \qquad m \neq n$$

ortogonallik bağıntısını sağlarlar. $m = n$ durumunda ise

$$(\phi_n, \phi_n) = \int_a^b w(x)\,\phi_n^2(x)\;dx = \|\phi_n\|^{\,2}$$

integrali sıfırdan farklı olup $\|\phi_n\|$ ye $\phi_n$ ortogonal polinomunun *norm*u denir. Ortogonal polinom ailelerinin normları doğurucu fonksiyonlar yardımıyla hesaplanabilmektedir.

### i) Legendre Polinomlarının Normu:

$P_n(x)$ Legendre polinomları için doğurucu fonksiyon

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

formundadır. Burada $n$ indisi yerine $m$ indisi alınırsa $P_m(x)$ polinomları için doğurucu fonksiyon

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)\,t^m = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

olur. Bu iki eşitlik taraf tarafa çarpılıp, $[-1,1]$ aralığında integre edilirse

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \left[\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx\right] t^{n+m} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1-2xt+t^2}\,dx$$

elde edilir. $m \neq n$ için Legendre polinomlarının ortogonallik özelliği kullanılır ve ikinci yandaki integral hesaplanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx\right] t^{2n} = -\frac{1}{2t}\ln(1-2xt+t^2)\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2t}\left[\ln(1-t)^2-\ln(1+t)^2\right]$$
$$= \frac{1}{t}\left[\ln(1+t)-\ln(1-t)\right]$$

elde edilir. $\ln(1+t)$ ve $\ln(1-t)$ fonksiyonlarının Taylor seri açılımları yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx\right] t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}t^{2n}$$

bulunur. $t^{2n}$ in katsayıları karşılaştırılırsa

$$\|P_n\|^{\,2} = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}$$

elde edilir. Burada $\|P_n\|$ Legendre polinomlarının normunu ifade etmektedir.

**ii) $H_n(x)$ Hermite Polinomlarının Normu:**

$H_n(x)$ Hermite polinomlarının normunu Rodrigues formülünden yararlanarak da hesaplayabiliriz. $H_n(x)$ Hermite polinomları için Rodrigues formülü

$$H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

formunda verilmişti. Bundan yararlanılırsa

$$\|H_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\left[H_n(x)\right]^2\,dx = (-1)^n\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)\,dx$$

olur. Bu eşitlikte $n$ kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\|H_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\frac{d^n}{dx^n}H_n(x)\,dx = k_n n!\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = k_n n!\,\sqrt{\pi}$$

elde edilir. $k_n$, $H_n(x)$ Hermite polinomlarının başkatsayısı olup $k_n = 2^n$ dir. Buradan Hermite polinomlarının normu $\|H_n\| = (2^n\, n!\, \sqrt{\pi})^{1/2}$ olarak bulunur.

Ortogonal polinom ailelerinin bazılarının normu aşağıda verilmektedir.

**iii)** $L_n^{(\alpha)}(x)$ **Genelleştirilmiş Laguerre Polinomlarının Normu:**

$$\left\|L_n^{(\alpha)}\right\|^2 = \int_0^{\infty} x^{\alpha}\, e^{-x} \left[L_n^{(\alpha)}(x)\right]^2 dx = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \qquad , \qquad \alpha > -1$$

**iv)** $He_n(x)$ **Hermite Polinomlarının Normu:**

$$\|He_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, He_n^2(x)\, dx = n!\, \sqrt{2\pi}$$

**v)** $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ **Jacobi Polinomlarının Normu:**

$$\begin{aligned} \left\|P_n^{(\alpha,\beta)}\right\|^2 &= \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}\, (1+x)^{\beta} \left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2 dx \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\; \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\, \Gamma(\beta+n+1)}{n!\, \Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \qquad ; \qquad \alpha > -1 \;,\; \beta > -1 \end{aligned}$$