2.8. Ortogonal Polinomlar Cinsinden Seriye Açılımlar

$[a,b]$ aralığında parçalı sürekli herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu $\phi_n(x)$ ortogonal polinomları cinsinden

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

formunda düzgün yakınsak bir seriye açılabilir. Burada c_n katsayıları

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\, w(x)\, \phi_n(x)\, dx}{\int_a^b w(x)\ \phi_n^2(x)\, dx} \qquad ; \qquad n = 0, 1, ...$$

ile verilmektedir.

Şimdi de örnek olarak Legendre polinomlarına açılımları inceleyelim.
$[-1,1]$ aralığında parçalı sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu $P_n(x)$ Legendre polinomları cinsinden

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, P_n(x) \qquad ; \quad -1 \leq x \leq 1$$

formunda bir seriye açılabilir. Bu ifadenin her iki yanı $P_m(x)$ ile çarpılıp $[-1,1]$ aralığında integral alınırsa ve Legendre polinomlarının ortogonallik özelliği kullanılırsa, c_n katsayıları

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx$$

formunda bulunur.

Örnek 1. $f(x) = x^2 + x - 1$ polinomunu Legendre polinomları cinsinden ifade ediniz.

Çözüm: $-1 \leq x \leq 1$ aralığında $f(x) = x^2 + x - 1$ fonksiyonu

$$f(x) = x^2 + x - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, P_n(x)$$

şeklinde bir seri açılımına sahiptir. $f(x) = x^2 + x - 1$ ikinci dereceden bir polinom olduğundan $n \geq 3$ için $c_n = 0$ dır. $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ ve $P_2(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{2}$ olduğu dikkate alınarak

c_0, c_1, c_2 katsayıları

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+x-1)\,dx = -\frac{2}{3} \\
c_1 &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+x-1)x\,dx = 1 \\
c_2 &= \frac{5}{4}\int_{-1}^{1}(x^2+x-1)\left(3x^2-1\right)dx = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece $f(x) = x^2+x-1 = -\frac{2}{3}\,P_0(x) + P_1(x) + \frac{2}{3}\,P_2(x)$ olarak elde edilir.

Örnek 2.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad -1 \le x \le 0 \\ x^2 & ; \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun ilk üç terimli Legendre serisini elde ediniz.

Çözüm: $f(x)$ fonksiyonunun

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x) + ...$$

Legendre serisi açılımında c_0, c_1, c_2 katsayılarını elde edelim.

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{0} P_n(x)dx + \frac{2n+1}{2}\int_{0}^{1} x^2P_n(x)dx \quad ; \qquad n \ge 0$$

formülünde $n = 0, 1, 2$ için $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$ polinomları yerine konulursa

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \\
c_1 &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{0} x dx + \frac{3}{2}\int_{0}^{1} x^3 dx = -\frac{3}{4} + \frac{3}{8} = -\frac{3}{8} \\
c_2 &= \frac{5}{4}\int_{-1}^{0} (3x^2-1) dx + \frac{5}{4}\int_{0}^{1} x^2(3x^2-1) dx = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

bulunur. O halde istenilen ilk üç terimli Legendre serisi

$$f(x) = \frac{2}{3}P_0(x) - \frac{3}{8}P_1(x) + \frac{1}{3}P_2(x) + ...$$

olarak elde edilir.