1. Kuvvet Alanları ve Bir Kuvvet Alanında Yapılan İş

Uzayda bir kuvvet alanı ve yer vektörü $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(x,y,z)$ olan γ eğrisinin vektörel denklemleri,

$$\overrightarrow{V} = X(x,y,z)\overrightarrow{i} + Y(x,y,z)\overrightarrow{j} + Z(x,y,z)\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$$

olsunlar. Bu durumda

$$\begin{aligned} dT &= \overrightarrow{V}.d\overrightarrow{r} \\ dT &= X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz \end{aligned}$$

ifadesine elemanter iş adı verilir. O halde γ eğrisi boyunca A noktasından B noktasına gitmesi halinde yapılan iş,

$$T_{AB} = \int_{\gamma} dT = \int_{\gamma} X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz$$

dir.

Örnek 1.

$\overrightarrow{V} = [x^2 - 2xy,\ 2xy + y^2]$ vektörünün tanımladığı bir kuvvet alanında bir partikülün $y = x^2$ parabolü boyunca $A(0,0)$ noktasından $B(1,1)$ noktasına hareket etmesiyle yapılan işi hesaplayınız.

Çözüm

$X(x,y) = x^2 - 2xy, \quad Y(x,y) = 2xy + y^2$ olmak üzere $\dfrac{\partial X}{\partial y} = -2x \neq \dfrac{\partial Y}{\partial x} = 2y$ olduğundan verilen kuvvet alanı korunumlu değildir. O halde yapılan iş yola bağlıdır.

$$\gamma = \big\{(x,y) \ : \ y = x^2, \quad 0 \le x \le 1\big\}$$

olup,

$$\begin{aligned}
T_{AB} &= \int_\gamma dT = \int_\gamma X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy \\
&= \int_\gamma \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(2xy + y^2\right)dy \\
&= \int_0^1 \left(x^2 - 2x^3\right)dx + \left(2x^3 + x^4\right)2xdx \\
&= \frac{29}{30} \quad \text{iş birimi}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.

$\overrightarrow{V} = [x - y + 2z,\ xy - z^2,\ 3x^2 + 4yz]$ vektörünün tanımladığı bir kuvvet alanında bir partikül $A(1,0,-2)$ noktasından $B(3,3,-3)$ noktasına $\overline{AB}$ doğrusu boyunca hareket etmektedir. Yapılan işi hesaplayınız.

Çözüm

Verilen kuvvet alanı korunumlu olmayıp, yapılan iş yola bağlıdır. $A(1,0,-2)$ ve $B(3,3,-3)$ noktalarını birleştiren doğru,

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-0}{3} = \frac{z+2}{-1} = t$$

olmak üzere,

$$\gamma = \{(x,y,z)\ :\ x = 2t+1,\ y = 3t,\ z = -t+2,\ 0 \le t \le 1\}$$

olup,

$$\begin{aligned}
T_{AB} &= \int_\gamma dT = \int_\gamma X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz \\
&= -\frac{29}{2} \quad \text{iş birimi elde edilir.}
\end{aligned}$$

Örnek 3. $\overrightarrow{V} = [2xz^3 + 6y,\ 6x - 2yz,\ 3x^2z^2 - y^2]$ vektörünün tanımladığı kuvvet alanının korunumlu olduğunu gösteriniz. Bu alanda bir partikülün $A(1,-1,1)$ noktasından $B(2,1,-1)$ noktasına hareket etmesiyle yapılan işi hesaplayınız.

Çözüm: $X(x,y,z) = 2xz^3 + 6y$, $Y(x,y,z) = 6x - 2yz$ ve $Z(x,y,z) = 3x^2z^2 - y^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} rot\overrightarrow{V} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz^3 + 6y & 6x - 2yz & 3x^2z^2 - y^2 \end{vmatrix} \\ &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

olduğundan verilen kuvvet alanı korunumludur ve yapılan iş yoldan bağımsızdır. O halde öyle bir $\phi(x,y,z)$ fonksiyonu vardır ki,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xz^3 + 6y, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 6x - 2yz, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 3x^2z^2 - y^2$$

yazılabilir. Buradan

$$\phi(x,y,z) = x^2z^3 + 6xy - y^2z + c$$

olarak bulunur. Bu alanda bir partikülün $A(1,-1,1)$ noktasından $B(2,1,-1)$ noktasına hareket etmesiyle yapılan iş,

$$\begin{aligned} T_{AB} &= \int_A^B d\phi(x,y,z) = \phi(B) - \phi(A) \\ &= 15 \text{ iş birimi} \end{aligned}$$

olarak bulunur.