

## Kütle Hesapları

Cismin  $M$  kütlesi;

Cisim doğrusal ise:

$$M = \int_a^b \delta(x) dx$$

Cisim düzlemsel ise:

$$M = \iint_D \delta(x, y) dy dx$$

Cisim uzaysal ise:

$$M = \iiint_W \delta(x, y, z) dz dy dx$$

Cisim eğrisel ise:

$$M = \int_{\gamma} \delta(P) ds \quad , \quad P \in \gamma$$

formüllerıyla bulunur.

**Not:** Üç boyutlu uzayda bir  $\gamma$  eğrisi  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  olarak verilsin.

$$dS = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

olmak üzere,

$$M = \int_{\gamma} \delta(x, y, z) ds$$
$$M = \int_a^b \delta(x(t), y(t), z(t)) \left( \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \right) dt$$

şeklindedir.

## Üç Boyutlu Uzayda Bölge Dönüşümleri

$xyz$  koordinatlarını  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$ ,  $z = z(u, v, w)$  bölgesine dönüştürelim.

$$\iiint_W \delta(x, y, z) dx dy dz = \iiint_R \delta(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw$$

dır. Burada dönüşümün Jakobiyeni

$$|J| = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

ile verilir.

### Silindirik Koordinatlar

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \text{ olmak üzere } |J| = r \text{ dir.}$$

### Küresel Koordinatlar

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases} \text{ olmak üzere } |J| = r^2 \sin \phi \text{ dir.}$$

### Örnek 1.

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  olmak üzere denklemleri  $y = \sin x$  ve  $y = \cos x$  olan eğriler ile  $Oy$ -ekseni arasındaki düzlemsel cismin yoğunluğu  $\delta(x, y) = ky^2$  olduğuna göre cismin kütleliğini bulunuz.

### Çözüm:

$xy$ -uzayındaki bu düzlemsel cisime  $D$  denirse,

$$D = \left\{ (x, y) : \sin x \leq y \leq \cos x ; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

yazılabilir.

$P \in D$  noktasında;

Yoğunluk:  $\delta(x, y) = k y^2$

Hacim elemanı:  $dv = dx dy$

Kütle elemanı:  $dm = k y^2 dx dy$

olup,  $D$  cisminin  $M$  kütlesi;

$$\begin{aligned} M &= \int_D dm = \int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\pi/4 \cos x} k y^2 dy dx \\ &= \frac{k}{3} \left( \frac{5\sqrt{2} - 4}{6} \right) \text{ birim-kütle} \end{aligned}$$

olarak bulunur.