Guldin Teoremleri

Birinci Guldin Teoremi

D : Düzlem parçası

S : D nin alanı

G_D : D nin ağırlık merkezi

r : G_D nin x eksenine (dönme ekseni) uzaklığı

V : D nin x ekseni etrafında dönmesinden meydana gelen dönel cismin hacmi ise;

$$V = S.2\pi r$$

dir.

Örnek 1.

Köşeleri $(-1,4),\ (-1,1),\ (3,4)$ ve $(3,1)$ olan homogen bir dikdörtgenler bölgesinin $x-y=3$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

Birinci Guldin Teoreminden yararlanmak için D nin alanı ve G_D nin $x-y=3$ doğrusuna olan uzaklığını bulmalıyız. D dikdörtgensel bir bölge olduğu için D nin alanı,

$$S = 3.4 = 12\ br^2$$

ve ağırlık merkezi,

$$G_D = \left(1, \frac{5}{2}\right)$$

dir. Bir $(x_0,\ y_0)$ noktasının $Ax+By+C=0$ doğrusuna olan dik uzaklığı r ise,

$$r = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

olup, $G_D\left(1, \frac{5}{2}\right)$ noktasının $x-y=3$ doğrusuna olan uzaklığı,

$$r = \frac{\left|1-\frac{5}{2}-3\right|}{\sqrt{2}} = \frac{9}{2\sqrt{2}}\ br$$

olarak bulunur. O halde dönel cismin hacmi Birinci Guldin Teoreminden,

$$V = S.2\pi r = \frac{108}{\sqrt{2}}\pi\ br$$

dir.

İkinci Guldin Teoremi

C : Düzlemsel homogen yay parçası (açık ya da kapalı olabilir)

l : C yayının uzunluğu

G_C : C yayının ağırlık merkezi

η : G_C nin x eksenine (dönme eksenine) uzaklığı

J : C yayının x ekseni etrafında dönmesinden meydana gelen yüzeyin alanı ise,

$$J = l.2\pi\eta$$

dır.

Örnek 2.

$r = a\left(1+\cos\theta\right)$ kutupsal denklemiyle verilen kardiyoit eğrisi boyunca yerleştirilmiş homogen bir tel parçasının ağırlık merkezini bulunuz. Bu telin $r = 2a$ noktasındaki teğeti etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin yüzey alanını hesaplayınız.

Çözüm: Cisim γ olsun.

$$\gamma = \left\{(r,\theta) : \ r = a\left(1+\cos\theta\right), \quad 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$$

şeklindedir.

$P(x,y) \in \gamma$ noktasında;

Yoğunluk: $\delta(P) = k$

Hacim elemanı: $dv = ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = 2a \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta$

Kütle elemanı: $dm = 2ak \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta$ şeklindedir.

Cisim şekil ve kütle bakımından x eksenine göre simetrik olduğundan $\overline{y} = 0$ dır. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
M &= \int_\gamma dm = 2ak \int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta = 8ak \text{ birim kütle} \\
M_x &= \int_\gamma x\, dm = 2ak \int_0^{2\pi} r\cos\theta \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta \\
&= 2a^2k \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)\cos\theta \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta \\
&= \frac{32a^2k}{5}
\end{aligned}
$$

bulunur. $\overline{x} = \frac{M_x}{M}$ olduğundan $\overline{x} = \frac{4a}{5}$ elde edilir. O halde ağırlık merkezi $G\left(\frac{4a}{5}, 0\right)$ dır.

İkinci Guldin Teoremini uygulayabilmek için ağırlık merkezinin dönme eksenine olan uzaklığını bulalım.

$$\eta = 2a - \frac{4a}{5} = \frac{6a}{5}$$

elde edilir. l yay uzunluğu da,

$$l = \int_\gamma ds = 8a \ br$$

olup, o halde dönel cismin yüzey alanı,

$$J = l.2\pi\eta = \frac{96}{5}a^2\pi$$

olarak hesaplanır.