

Eylemsizlik Momenti

Verilen bir W cisminin sabit bir noktaya ya da bir doğru veya bir düzleme uzaklığı r olsun. Bu sabit bir noktaya (doğruya veya düzleme) göre olan I eylemsizlik momenti,

$$I = \iiint_W r^2(x, y, z) dm$$

ya da

$$I = \iiint_W \delta(x, y, z) r^2 dzdydx$$

formülü ile verilir.

1) Bir $P(a, b, c)$ noktasına göre eylemsizlik momenti,

$$I_p = \iiint_W [(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2] dm$$

şeklindedir. Özel olarak $O(0, 0, 0)$ noktasına göre eylemsizlik momenti,

$$I_o = \iiint_W (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

olarak bulunur.

2) Uzayda koordinat eksenlerine göre eylemsizlik momentleri

$$I_{0x} = \iiint_W \delta(x, y, z) (y^2 + z^2) dzdydx$$

$$I_{0y} = \iiint_W \delta(x, y, z) (x^2 + z^2) dzdydx$$

$$I_{0z} = \iiint_W \delta(x, y, z) (x^2 + y^2) dzdydx$$

3) Koordinat düzlemlerine göre eylemsizlik momentleri

$$I_{y0z} = \iiint_W \delta(x, y, z) x^2 dz dy dx$$

$$I_{z0x} = \iiint_W \delta(x, y, z) y^2 dz dy dx$$

$$I_{x0y} = \iiint_W \delta(x, y, z) z^2 dz dy dx$$

ifadeleri ile verilirler.

Örnek 1. $x^2 + y^2 = a^2$, $a^2 z = x^2 + y^2$ ve $z = 0$ yüzeyleri tarafından sınırlanan $\delta = kz^m$ yoğunluklu W cisminin Oz eksenine göre eylemsizlik momentini cismin M kütlesi cinsinden hesaplayınız.

Çözüm:

$$\text{Cisim } W \text{ olsun. } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \text{ olmak üzere silindirik koordinatlara geçilirse,}$$

$$W = \left\{ (z, r, \theta) : 0 \leq z \leq \frac{r^2}{a^2}, 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

elde edilir.

$P \in W$ noktasında;

Yoğunluk: $\delta(P) = kz^m$

Hacim elemanı: $dv = r dz dr d\theta$

Kütle elemanı: $dm = k r z^m dz dr d\theta$ şeklindedir. Cismin kütlesi,

$$M = \iiint_W dm = k \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{r^2/a^2} r z^m dz dr d\theta$$

$$M = \frac{ka^2\pi}{(m+1)(m+2)} \text{ birim kütle}$$

olarak bulunur.

W cisminin Oz eksenine göre eylemsizlik momenti,

$$\begin{aligned} I_{0z} &= \iiint_W (x^2 + y^2) dm = \iiint_W r^2 dm \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{r^2/a^2} r^3 z^m dz dr d\theta \\ &= \frac{ka^4\pi}{(m+1)(m+3)} \end{aligned}$$

bulunur. O halde eylemsizlik momentinin cismin M kütlesi cinsinden değeri,

$$I_{0z} = \frac{a^2(m+2)}{m+3} M$$

şeklindedir.