Ortogonal Fonksiyonlar Sistemi

$\{\phi_n(x)\}$ bir $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların bir dizisi olsun. $\forall x \in [a,b]$ için $q(x) \geq 0$ olan bir fonksiyon olmak üzere eğer,

$$\int_a^b q(x)\,\phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx = 0 \quad , \quad m \neq n$$

sağlanıyor ise, $\{\phi_n(x)\}$ fonksiyonlar dizisine $[a,b]$ aralığında $q(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal (dik) bir sistem teşkil ediyor denir. Eğer bu integralde $m = n$ alınırsa,

$$\|\phi_n\| = \left[\int_a^b q(x)\phi_n^2(x)\,dx\right]^{1/2}$$

ifadesine $\{\phi_n\}$ ortogonal sisteminin normu denir.

Ortogonal bir sistemin herbir elemanı normuna bölünerek ortonormal bir sistem elde edilir. Ortonormal sistemler,

$$\int_a^b q(x)\phi_m(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} 0 \ , & m \neq n \\ 1 \ , & m = n \end{cases}$$

koşulunu gerçeklerler.

Örnek 1. $\{\sin 3nx\}$, $n = 1, 2...$ fonksiyonunun $[-\pi, \pi]$ de $q(x) = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal sistem teşkil ettiğini gösterip, bu sisteme karşılık gelen ortonormal sistemi bulunuz.

Çözüm: $\{\sin 3nx\}$, $n = 1, 2...$ fonksiyonunun $[-\pi, \pi]$ de ortogonal bir sistem teşkil etmesi için,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3nx)\sin(3mx)dx = 0, \quad m \neq n$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\sin(3nx)\sin(3mx) = \frac{1}{2}\left[\cos(3m-3n)x - \cos(3m+3n)x\right]$$

olup integralde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3nx)\sin(3mx)dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(3m-3n)x - \cos(3m+3n)x] \\ &= \left[\frac{\sin(3m-3n)x}{(3m-3n)} + \frac{\sin(3m+3n)x}{(3m-3n)}\right]\Bigg|_0^{\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

olup o halde $\{\sin 3nx\}$ $n = 1, 2...$ ortogonal bir sistem olarak bulunur.

$$\begin{aligned}\|\sin(3nx)\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(3nx)dx \\ &= \int_{0}^{\pi} (1 - 6\cos(6nx))dx \\ &= \pi\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\|\sin(3nx)\| = \sqrt{\pi}$$

bulunur. Bu sisteme karşılık gelen ortonormal sistem herbir elemanın norma bölünmeiyle elde edilir ki bu da

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(3nx)}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin(3mx)}{\sqrt{\pi}}dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

olmasıdır.

Örnek 2. $P_n(x)$ Legendre polinomları $[-1, 1]$ aralığında $\omega(x) = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre diktirler.

Çözüm:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad , \quad m \neq n$$

sağlanır.

Bunu ispat edebilmek için Legendre diferensiyel denklemini ele alalım. P_m ve P_n Legendre polinomları olduklarına göre Legendre diferensiyel denklemini sağlayacaklardır.

$$\left(1-x^2\right) P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0$$

$$\left(1-x^2\right) P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

Bu eşitliklerden birincisini P_n ile, ikincisini P_m ile çarpar ve taraf tarafa çıkartırsak

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\left(P_nP_m' - P_mP_n'\right)\right] = (n-m)(n+m+1)P_mP_n$$

elde edilir. Bu son eşitliğin her iki yanının $[-1,1]$ aralığında integre edildiğinde eşitliğin sağ tarafının sıfır olması dikkate alınırsa,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad , \quad m \neq n$$

elde edilir.