Fourier Serileri

x bir değişken $a_0, a_1, ..., a_n$ ve $b_1, ..., b_n$ ler sabitler olmak üzere,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

şeklindeki bir fonksiyon serisine Fourier serisi adı verilir. a_n ve b_n sabitlerine de Fourier katsayıları denir.

2π peryotlu periyodik bir $f(x)$ fonksiyonu için, bu fonksiyona yakınsayan bir Fourier serinin bulunması $f(x)$ in aşağıdaki koşulları sağlamasına bağlıdır.

Dirichlet Koşulları:

1) $f(x)$ fonksiyonu 2π peryotlu periyodik bir fonksiyon,

2) $f(x), (-\pi, \pi)$ aralığında parçalı sürekli,

3) $f(x), (-\pi, \pi)$ aralığında sonlu sayıda ekstremuma sahip olmalıdır

Bu taktirde $f(x)$ fonksiyonu x bir süreklilik noktası ise $f(x)$ e, x bir düzgün süreksizlik noktası ise $[f(x^+) + f(x^-)]/2$ ye eşit olan bir Fourier serisine açılabilir.

2π Periyotlu Bir Fonksiyonun Fourier Serisi

$(-\pi, \pi)$ aralığında Dirichlet koşullarını gerçekleyen ve aralığın dışında 2π peryotlu periyodik bir fonksiyon olan $f(x)$ in Fourier serisi,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

şeklindedir. Burada Fourier katsayıları,

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx \quad , \qquad n = 1, 2, ... \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx \quad , \qquad n = 1, 2, ...
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

Örnek 1: $-\pi < x < \pi$ aralığında $f(x) = x + |x|$ fonksiyonu ile çakışan periyodik fonksiyonun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm: $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

şeklinde bir Fourier serisi elde edilmelidir. Fourier katsayılarını bulalım.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\ dx + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx = \pi \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0.\cos nx\ dx + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\ dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\ dx = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin nx\ dx\right\} \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right] \\
&= \begin{cases} 0 & ;\ n = 2k \\ -\frac{4}{(2k-1)^2} & ;\ n = 2k-1 \end{cases} \quad k = 1, 2, ... \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0.\sin nx\ dx + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\ dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos nx\ dx\right\} \\
&= -\frac{2}{n}\cos n\pi = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}
\end{aligned}
$$

olduklarından istenilen Fourier serisi,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\,x}{(2k-1)^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

olarak bulunur.