Beta Fonksiyonu

Beta Fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

1) $B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$

2) $B(x,y) = 2\int\limits_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\,d\theta$

3) $B(x,y) = \int\limits_0^{\infty} \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du$

4) $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

5) $B(x,1-x) = \Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin\pi x}$

Örnek 1.

Aşağıdaki integrallerin değerlerini hesaplayınız.

a) $\int\limits_0^a x^5\sqrt{a-x}dx$ **b)** $\int\limits_0^{\pi/6} \sqrt{(\sin 3\theta)^{11}(\cos 3\theta)^9}d\theta$

Çözüm:

a) Bu integrali hesaplayabilmek için $x = at$ dönüşümü yapalım. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^a x^5\sqrt{a-x}dx &= a^{13/2}\int\limits_0^1 t^5(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt \\
&= a^{13/2}B\left(6,\frac{3}{2}\right) \\
&= a^{13/2}\frac{\Gamma(6)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{15}{2}\right)} \\
&= \frac{a^{13/2}2^9}{9009}
\end{aligned}$$

bulunur.

b) $3\theta = t$ dönüşümü yapılıp, Beta fonksiyonunun 2) tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/6} \sqrt{(\sin 3\theta)^{11} (\cos 3\theta)^9} d\theta &= \frac{1}{6}.2 \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{\frac{11}{2}} (\cos t)^{\frac{9}{2}} dt \\
&= \frac{1}{6} B\left(\frac{13}{4}, \frac{11}{4}\right) \\
&= \frac{1}{6} \frac{1.3.5.7.9}{2^{10}.5!} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. 5) in kullanılmasıyla

$$\int_0^{\pi/6} \sqrt{(\sin 3\theta)^{11} (\cos 3\theta)^9} d\theta = \frac{21\sqrt{2}}{2^{14}} \pi$$

bulunur.

Örnek 2.

$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}.n!}$ $(n = 0, 1, 2...)$ bağıntısının doğruluğunu gösterdikten sonra bu bağıntıdan yararlanarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $B\left(n, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2^{2n}. (n!)^2}{n. (2n)!}$ **b)** $B\left(n + \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!\pi}{2^{2n}. (n!)^2}$

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) \\
&= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\left(n - \frac{5}{2}\right) ... \frac{3}{2}\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n-1)(2n-3)...3.1}{2^n} \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}.n!}
\end{aligned}$$

elde edilir.

a) $$B\left(n,\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{2^{2n}.n!(n-1)!}{(2n)!}=\frac{2^{2n}.\left(n!\right)^{2}}{n.\left(2n\right)!}$$

b) $$B\left(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+1\right)}=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}.n!}\frac{\sqrt{\pi}}{n!}=\frac{(2n)!\pi}{2^{2n}.\left(n!\right)^{2}}$$

şeklindedir.