MATEMATİK MODELLERİN SAPMA DEĞİŞKENLERİ FORMU

[1-5]

Kaynaklar

1. Luyben, W.L.1990. Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers, 2nd ed.,McGraw-Hill, New York.
2. Bequette, B.W. 1998. Process Dynamics, Modeling, Analysis and Simulation, Prentice Hall, New Jersey
3. Thomas E. Marlin, 2000. Designing Procesees and Control Systems for Dynamic Performance, 2nd Edition, McGraw Hill Book Co, Singapore.

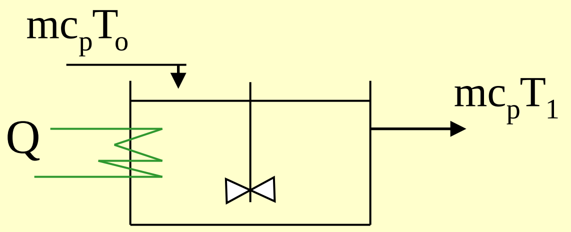
4.Matlab 9, The MathWorks, Inc., Apple Hill Drive, Natick, MA.,2009

5. Alpbaz M.,Proses Kontrol, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, No:121993 Ankara

Matematik modellerin sapma değişkenleri formu

Sistemlerin kontrol vedinamik tasarımlarında sapma değişkenleri çok kullanılmaktadır. Sistemin zamana bağlı değişkeninin ilk yatışkın halden ikinci yatışkın hale geçerken gösterdiği değişimler sapma değişkenleri ile tanımlanır.

ÖRNEK1:



Şekil 1. Sıvı ısıtma sistemi

Sistemde Yatışkın-hal Enerji denkliği yazılırsa:

$$mc_pT_0^0 + Q - mc_pT_1^0 = 0 \qquad (1)$$

Sistemi etkileyen zamana bağlı değişkenler

a) $T^o_o \longrightarrow T_o(t)$

b) $Q \longrightarrow Q+q(t)$

Çıkış değişkeninin sistemi etkileyen değişkenler ile değişimi

c) $T^o_1 \longrightarrow T_1(t)$

Yatışkın olmayan- hal denklemi

$$mc_pT_o(t)+Q+q(t) = Mc_pT_1+Mc_p\left(\frac{dT_1}{dt}\right) \qquad (2)$$

Denklem (3.16)'dan, denklem (3.15) çıkarılırsa;

$$mc_p(T_o(t)-T^o_o)+q(t) = mc_p(T_1-T^o_1)+Mc_p\frac{d}{dt}(T_1-T^o_1) \qquad (3)$$

Sapma değişkenleri

$$\frac{d}{dt}\left(T_1 - T^o_1\right) = \frac{dT_1}{dt} \qquad (3)$$

$$\frac{dT^o_1}{dt} = 0 \qquad (4)$$

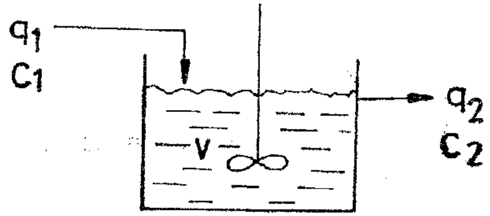
$$m c_p \theta_o(t) + q(t) = m c_p \theta_1(t) + M c_p \frac{d\theta_1(t)}{dt} \qquad (5)$$

Eşitlik (5) sıvı ısıtma sisteminin sapma değişkeni formunda matematik modelini ifade eder.

ÖRNEK 2

TEPKİME KABI

Aşağıda I. Mertebeden bir tepkime içeren tepkime kabının matematiksel modeli çıkartılacaktır.



Karıştırmalı bir tepkime kabı

q : Sıvının akış hızı

V : Kabın hacmi

C_1, C_2: Giriş ve çıkış derişimleri

Yatışkın-hal denklemi

$$qC^o_1 - qC^o_2 - kC^o_2V = 0 \tag{6}$$

Yatışkın olmayan-hal denklemi

$$qC_1 - qC_2 - kC_2V = V\frac{dC_2}{dt} \tag{7}$$

Denklem (7)'den (6) çıkartılırsa,

$$q(C_1-C^o_1)-q(C_2-C^o_2)-kV(C_2-C^o_2) = V\frac{d(C_2-C^o_2)}{dt} \tag{8}$$

Sapma degişkenleri tanımlanır ve denklem yazılırsa

$$qC'_1 - qC'_2 - kVC'_2 = V\frac{dC'_2}{dt} \tag{9}$$

$$\left(\frac{V}{q}\right)\left(\frac{dC'_2}{dt}\right) + \left(\frac{kV}{q}+1\right) C'_2 = C'_1 \tag{10}$$

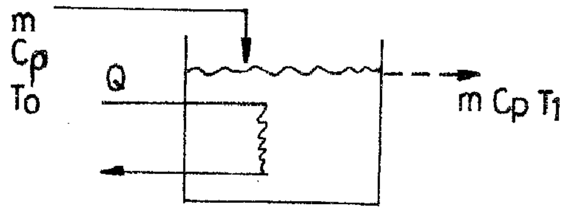
$$\left[\frac{\tau}{(k\tau+1)}\right]\frac{dC'_2}{dt}+C'_2=\frac{C'_1}{k\tau+1} \qquad (11)$$

Görüldüğü gibi I.Mertebeden tepkime içeren bir sürekli tepkime kabı I.Mertebeden bir diferansiyel denklemle ifade edilmektedir.

Sapma değişken modellerin çözümü

ÖRNEK Bir sıvı ısıtma sisteminin akış hızı 10 g/s dir ve bu siteme 20°C de girip 100 cal/s'lik bir ısıtıcı ile ısıtılarak ısınmış olarak çıkmaktadır. Tankın hacmi 100 cm^3 dür. Eğer ısıtıcıya 10 cal/s'lik bir enerji artışı verilirse çıkış sıcaklığının zamana göre değişimi ne olur. Diğer şartlar aynı kalmak üzere tankın hacmi 10 cm^3 ve 1000 cm^3 olarak değiştirildiğinde çıkış sıcaklığının değişimini inceleyiniz.

ÇÖZÜM



Şekil 5.9 Sıvı ısıtma sistemi.

Yatışkın-hal denklemi;

$$mc_pT^o_o+Q-mc_pT^o_1=0$$

Yatışkın-olmayan hal denklemi;

$$mc_pT_o+(Q+q)-mc_pT_1=V\rho c_p\frac{dT_1}{dt}$$

Sapma degiskenleri cinsinden;

$$mc_p(T_o-T^o_o)-mc_p(T_1-T^o_1)+q=V\rho c_p\frac{d(T_1-T^o_1)}{dt}$$

$$mc_p\theta_o-mc_p\theta_1+q=V\rho c_p\frac{d\theta_1}{dt}$$

$$\theta_o-\theta_1+\frac{q}{mc_p}=\frac{V.\rho}{m}\frac{d\theta_1}{dt}$$

$$K=\frac{1}{mc_p}\quad,\quad L=\frac{V\rho}{m}$$

$$\theta_o-\theta_1+kq=L\frac{d\theta_1}{dt}$$

Bu ifadenin Laplace dönüşümü alınırsa;

$$\theta_o(s)-\theta_1(s)+kq(s)=Ls\theta_1(s)$$

$$(Ls+1)\theta_1(s)=\theta_o(s)+kq(s)$$

$$\theta_1(s)=\frac{1}{(Ls+1)}\theta_o(s)+\frac{k}{(Ls+1)}q(s)$$

$\theta_o(s)=0$ (Giriş sıcaklığında değişim yok).Böylece,

$$\theta_1(s)=\frac{k}{(Ls+1)}q(s)$$

$$K = \frac{1}{mc_p} = \frac{1}{10*1} = 0.1$$

$$L = \frac{V\rho}{m} = \frac{100*1}{10} = 10 \text{ sn}$$

$$\theta_1(s) = \frac{K}{Ls+1} q(s) = \frac{0.1}{10s+1} \frac{10}{s}$$

$$\theta_1(s) = \frac{1}{s(10s+1)}$$

$$\theta_1(s) = \frac{1}{s(10s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{10s+1}$$

A=1 ve B=-10 bulunur.

$$\theta_1(s)=\frac{1}{s}-\frac{10}{10s+1}$$

Ters Laplace dönüşümü alınırsa;

$$\theta_1(t)=1-e^{-t/10}$$

$$T_1-T^o{}_1=1-e^{-t/10}$$

$$mc_pT^o{}_o-mc_pT^o{}_1+Q=0$$

$$mc_p(T^o{}_o-T^o{}_1)+Q=0$$

$$(T°_o - T°_1) = -\frac{Q}{mc_p}$$

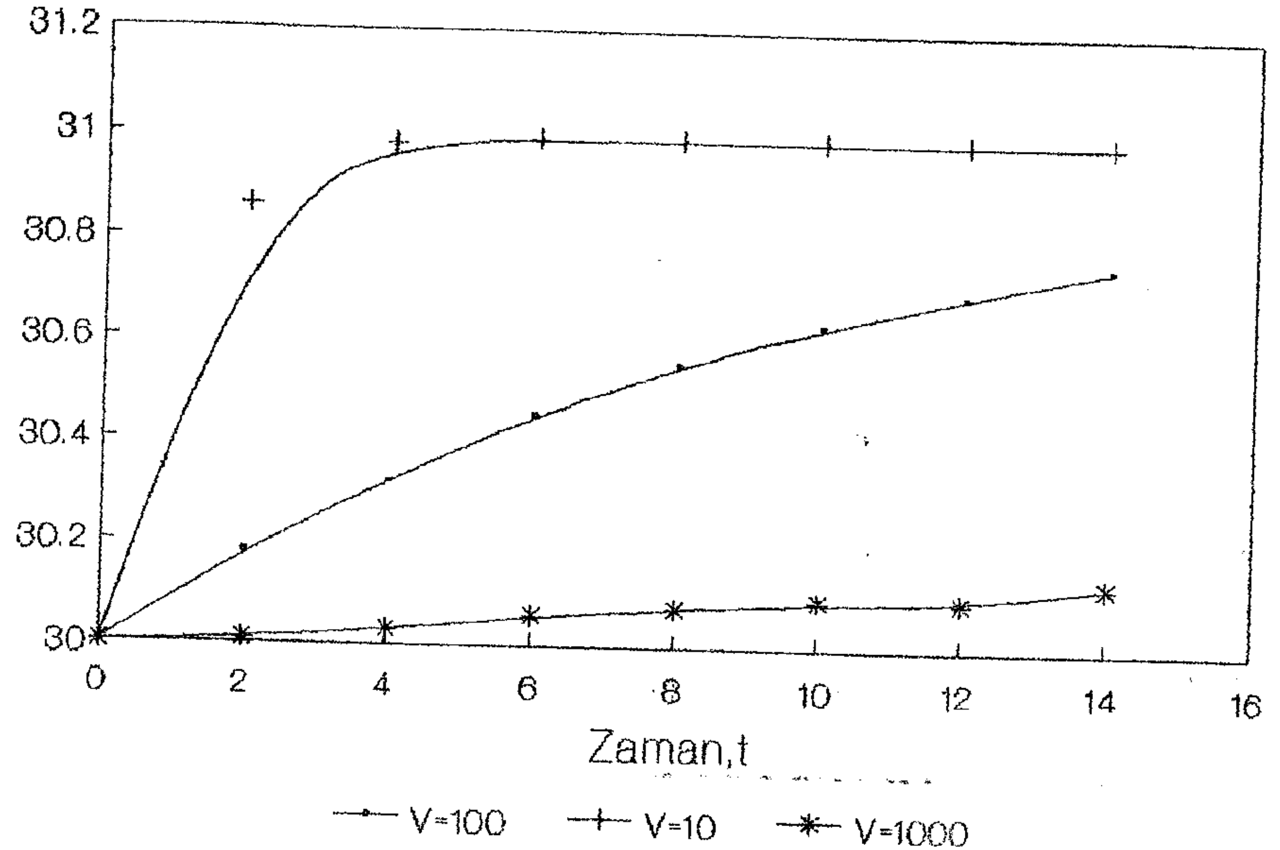
$$T°_1 = T°_o + \frac{Q}{mc_p} = 20 + \frac{100}{10*1} = 30°C$$

$$T_1 = 31 - e^{-t/10} \quad , \quad m = 100 \text{ kg/s}$$

$$T_1' = 31 - e^{-t/100} \quad , \quad m = 1000 \text{ kg/s}$$

$$T_1'' = 31 - e^{-t} \quad , \quad m = 10 \text{ kg/s}$$

Bu denklemlere göre aşağıdaki sonuçlar elde edilir.



Sıcaklıgın zamana göre degişimi.