DOĞRUSAL OLMAYAN PROSESLERİN MATEMATİK MODELLERİ [1-5]

Kaynaklar

1. Luyben, W.L.1990. Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers, 2nd ed.,McGraw-Hill, New York.
2. Bequette, B.W. 1998. Process Dynamics, Modeling, Analysis and Simulation, Prentice Hall, New Jersey
3. Thomas E. Marlin, 2000. Designing Procesees and Control Systems for Dynamic Performance, 2nd Edition, McGraw Hill Book Co, Singapore.
4. Matlab 9, The MathWorks, Inc., Apple Hill Drive, Natick, MA.,2009
5. Alpbaz M.,Proses Kontrol, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, No:121993 Ankara

Doğrusal olmayan proseslerin matematik modelleri

Bilindiği üzere Laplace dönüşümleri ile ilgili çözümler doğrusal diferansiyel denklemlere uygulanır. Bu nedenle doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerle ifade edilen sistemlerin doğrusallaştırılmaları gerekir. Bu bölümde önce doğrusal olmayan bir fonksiyon veya diferansiyel denklemin Taylor açılımı yapılacak ve sonra doğrusal olmayan proseslere ait iki sistem örneği gösterilecektir.

6.1 TAYLOR AÇILIMI YÖNTEMİ İLE DOGRUSALLAŞTIRMA

Aşağıdaki diferansiyel denklemin f(x) teriminin doğrusal olmayan yapıya sahip olduğunu düşünelim. Bu fonksiyon iki ayrı değişken çarpımı veya aynı değişkenin karesi, küpü olabilir. Bu durumda aşağıda verilmiş olan Taylor yöntemi kullanılır.

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

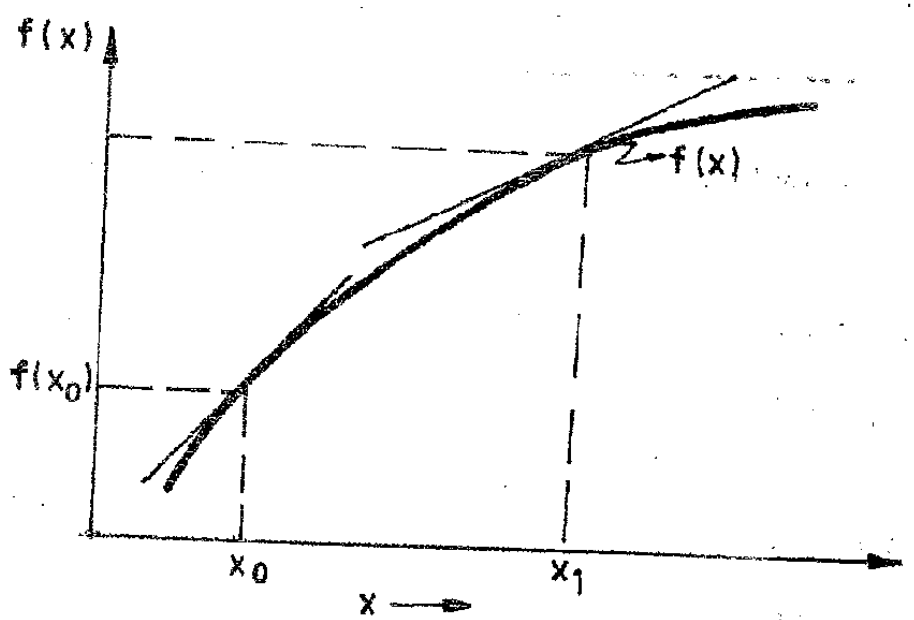
$$f(x)=f(x_o)+\left(\frac{df}{dx}\right)_{xo}\frac{x-x_o}{1!}+\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{xo}\frac{(x-x_o)^2}{2!}+..+\left(\frac{d^nf}{dx^n}\right)_{xo}\frac{(x-x_o)^n}{n!}$$

Taylor açılımı başlangıç koşullarının x_o degeri civarında yapılır. Birinci türevden sonraki diger terimler iptal edilirse, Taylor yöntemi ile dogrusallaştırma gerçekleştirilir.

$$f(x) = f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o)$$

Böylece dogrusal olmayan terim bir doğru denklemi ile ifade edilmiş ve Laplace dönüşümü alınabilecek düzeye getirilmiştir.

Aşağıda verilen ve I.Türevden sonraki terimlerin ihmal edilmesi fonksiyonun sonucunu fazla etkilememelidir. Bu durum aşağıdaki şekilde verilebilir.



Bir egrinin dogrusallaştırılması

$$I = \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)\Big|_{xo} \frac{(x-x_o)^2}{2!} + \ldots.$$

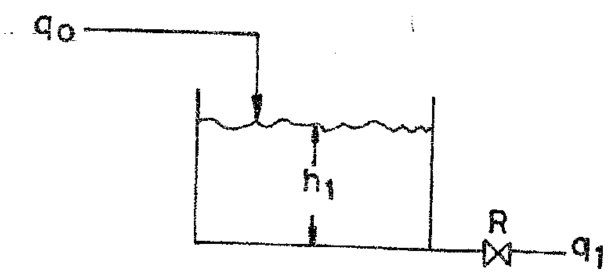
$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x-x_o) + I$$

Görüldügü gibi bir x_o noktasında yapılan dogrusallaştırma işlemi tüm sistemi temsil edememektedir. Bu nedenle çeşitli x_o noktalarında doğrusallaştırma yapılarak dogrusal olmayan sistemi farklı doğru denklemleri ile ifade edilmesi gerekir.

Doğrusal olmayan proseslerin matematik modellerinin çözümü

ÖRNEK Yüzey alanı 3 m^2 ve yatışkın-hal sıvı yüksekliği 3 m olan bir sıvı seviye sisteminin çıkış hızı $8h^{0.5}$ şeklinde ifade edilmektedir. Bu sistemin zaman sabitini hesaplayınız.

ÇÖZÜM 6.1



Doğrusal olmayan sıvı seviye sistemi

Yatışkın-hal denklemi;

$$q^{o}_{o} - q^{o}_{1} = 0$$

Yatışkın-olmayan hal denklemi;

$$q_o - 8h^{0.5} = A \frac{dh}{dt}$$

Bu denklemin doğrusallaştırılması gerekir.

Bunun için Taylar açılımından yararlanılır. $f(x)$ fonksiyonunun $x=x_o$ komşuluğunda (civarında) Taylor açılımı:

$$f(x) = f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o)+f''(x_o)\frac{(x-x_o)^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots$$

Genellikle ikinci türevle birlikte sonraki terimler ihmal edilir. Böylece eşitlik şu hale dönüşür;

$$f(x) = f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o)$$

$q_1(h)$ denkleminin $h=h_o$ komşuluğunda Taylor açılımı ise;

$$q_1(h) = q_1(h_o)+q'_1(h_o)(h-h_o)$$

$q_1(h) = 8h^{0.5}_{o}+4h^{-0.5}_{o}(h-h_o)$ yerine yazarsak;

$$(q_o-q^o_o)-4h^{-0.5}_{o}(h-h_o) = A\frac{dh}{dt}$$

$$Q_o - 4h^{-0.5}_{o}H = A\frac{dH}{dt}$$

$$\frac{1}{R} = 4H^{-0.5}_{o} \quad , \quad R = \frac{1}{4H^{-0.5}_{o}}$$

$\tau=AR$

$$Q - \frac{1}{R}H = A\frac{dH}{dt}$$

$\tau=1.3$ dk. bulunur.