Sturm Ayırma Teoremi:

$u(x)$ ve $v(x)$ bir $[a, b]$ aralığında

$$L\left[y\right] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = 0$$

denkleminin lineer bağımsız herhangi iki çözümü iseler, o takdirde $u(x)$ in ardışık iki sıfır yeri arasında $v(x)$ in kesin ve tam olarak bir sıfır yeri vardır. Yani $u(x)$ ve $v(x)$ lineer bağımsız çözümlerinden herbirinin sıfır yerleri diğer çözümün sıfır yerlerini ayırır.

Örnek 1. $\phi_1(x) = 19\sin 5x + 23\cos 5x$ trigonometrik denklemi $\left[-\frac{3\pi}{5}, \pi\right]$ aralığında kaç tane sıfır yerine sahip olabilir? Nedenini açıklayınız?

Çözüm: $y'' + 25y = 0$ denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x$$

şeklindedir. $c_1 = 23$ ve $c_2 = 19$ olarak seçilirse ϕ_1 çözümü elde edilir. Verilen aralığın uç noktalarında sıfır olacak şekilde bir çözüm seçelim. Buna göre $\phi_2(x) = \sin 5x$ olsun. Burada ϕ_1 ile ϕ_2 lineer bağımsız olacak şekilde seçilmelidir. Buna göre Teorem den dolayı ϕ_2 nin ardışık iki sıfır yeri arasında ϕ_1 in kesin ve tam olarak bir sıfır yeri vardır. ϕ_2 nin sıfır yerleri dikkate alındığında ϕ_1 in $\left[-\frac{3\pi}{5}, \pi\right]$ aralığında kesin ve tam olarak sekiz sıfır yerine sahip olduğu görülür.

Örnek 2. $\phi_1(x) = 5\sin 30x + 85\cos 30x$ trigonometrik denklemi $[0, \pi]$ aralığında kaç tane sıfır yerine sahip olabilir?

Çözüm: $y'' + 900y = 0$ denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 \cos 30x + c_2 \sin 30x$$

şeklindedir. Özel olarak $c_1 = 85$ ve $c_2 = 5$ alındığında ϕ_1 çözümüne ulaşılır. Aralığın uç noktalarında sıfır olacak şekilde bir çözüm seçelim. Buna göre $\phi_2(x) = \sin 30x$ olsun. ϕ_1 ile ϕ_2 lineer bağımsız fonksiyonlar olup, buna göre Teorem den dolayı ϕ_2 nin ardışık iki sıfır yeri arasında ϕ_1 in kesin ve tam olarak bir sıfır yeri vardır. ϕ_2 nin sıfır yerleri dikkate alındığında ϕ_1 in $[0, \pi]$ aralığında kesin ve tam olarak otuz sıfır yerine sahip olduğu görülür.

Örnek 3. Sturm Ayırma Teoreminden yararlanarak $\phi_1(x) = \sin 2x + \cos 2x$ fonksiyonunu ardışık iki sıfır yeri arasında $\phi_2(x) = \sin 2x - \cos 2x$ in yalnız bir tane sıfır yerine sahip olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $y'' + 4y = 0$ denkleminin genel çözümü

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= 0 \implies r^2 + 4 = 0 \implies r_{1,2} = \pm 2i \\ y(x) &= c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \end{aligned}$$

şeklindedir. Çünkü

$$\begin{aligned} c_1 &= 1,\ c_2 = 1 \text{ için } \phi_1(x) = \sin 2x + \cos 2x \\ c_1 &= -1,\ c_2 = 1 \text{ için } \phi_2(x) = \sin 2x - \cos 2x \end{aligned}$$

elde edilir.

$$y'' + 4y = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) + 4y = 0$$

denkleminin ϕ_1 ve ϕ_2 çözümü lineer bağımsız ise Sturm Ayırma Teoremi kullanılabilir. ϕ_1 ve ϕ_2 nin lineer bağımsız olup olmadığını anlamak için Wronskiyene bakalım:

$$W(\phi_1, \phi_2, x) = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

olmalıdır.

$$W(\phi_1, \phi_2, x) = \begin{vmatrix} \sin 2x + \cos 2x & \sin 2x - \cos 2x \\ 2\cos 2x - 2\sin 2x & 2\cos 2x + 2\sin 2x \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

olduğundan ϕ_1 ve ϕ_2 lineer bağımsızdır. ϕ_1 ve ϕ_2 Sturm Ayırma Teoreminin hipotezlerini sağladıklarından ϕ_1 in ardışık iki sıfır yeri arasında ϕ_2 nin yalnız bir tane sıfır yeri vardır. Gerçekten de

ϕ_1 in sıfır yerleri için

$$\begin{aligned}
\sin 2x + \cos 2x &= 0 \\
\tan 2x &= -1 \\
x_k &= -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \; k = 0, \;\; \pm 1, \;\; \pm 2, ...
\end{aligned}$$

ve ϕ_2 nin sıfır yerleri için

$$\begin{aligned}
\sin 2x - \cos 2x &= 0 \\
\tan 2x &= +1 \\
x_k &= \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \; k = 0, \;\; \pm 1, \;\; \pm 2, ...
\end{aligned}$$

bulunur.