Teorem (Sturm Karşılaştırma Teoremi):

Bir $[a,b]$ aralığında $p(x)>0$ ve $p(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$ sürekli fonksiyonlar ve de $q_2(x)>q_1(x)$ olsunlar. Ayrıca $\phi_1(x)$ ve $\phi_2(x)$ ler sırasıyla

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q_1(x)y &= 0\\ \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q_2(x)y &= 0\end{aligned}$$

denklemlerinin birer reel çözümü olsunlar. Eğer $x_1$ve x_2, $\phi_1(x)$ in ardışık iki sıfır yeri ise, o takdirde $\phi_2(x)$ çözümü $x_1<x<x_2$ açık aralığında en az bir sıfır yerine sahiptir.

Örnek 1.

$$y''+\left(a^2+x^4\right)y=0$$

denkleminin herhangi bir $y(x)$ çözümünün $\left(\frac{n\pi}{a},\frac{(n+1)\pi}{a}\right)$ aralığında en az bir sıfır yerine sahip olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]+\left(a^2+x^4\right)y &= 0 \qquad (1)\\ \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]+a^2y &= 0 \qquad (2)\end{aligned}$$

denklemlerini ele alalım. $p(x)=1$, $q_1(x)=a^2+x^4$, $q_2(x)=a^2$ olmak üzere verilen aralıkta $p(x)=1>0$, $q_1(x)>q_2(x)$ sağlanır ve p, $q_1$ve q_2 sürekli fonksiyonlardır. O halde Sturm-Karşılaştırma Teoremi gereğince (2) nin herhangi bir $\phi(x)$ çözümünün iki sıfır yeri arasında (1) in bir çözümünün en az bir sıfır yeri vardır. (2) nin herhangi bir $\phi(x)$ çözümünü amaca uygun olarak $\phi(x)=\sin ax$ olarak seçelim. Buna göre $\frac{n\pi}{a}$ ve $\frac{(n+1)\pi}{a}$, $\phi(x)$ çözümünün ardışık iki sıfır yeri olup Sturm-Karşılaştırma teoremine göre (1) in herhangi bir çözümü $\frac{n\pi}{a}<x<\frac{(n+1)\pi}{a}$ aralığında en az bir sıfır yerine sahip olacaktır.

Örnek 2. $x^2y''+xy'+y=0$ denkleminin çözümlerinden biri $y(x)=\sin(\ln x)$ dir. $xy''+y'+\frac{e^x}{x}y=0$ denkleminin herhangi bir $y(x)$ çözümünün $(1,e^{\pi})$ aralığında en az bir sıfır yerine sahip olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Öncelikle $x^2y'' + xy' + y = 0$ denklemini self-adjoint forma dönüştürürsek

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \frac{1}{x}y = 0 \tag{3}$$

denklemini elde ederiz. Buna göre

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \frac{e^x}{x}y = 0 \tag{4}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \frac{1}{x}y = 0 \tag{5}$$

denklemlerini ele alalım. $p(x) = x$, $q_1(x) = \dfrac{e^x}{x}$, $q_2(x) = \dfrac{1}{x}$ olmak üzere verilen aralıkta $p(x) = x > 0$, $q_1(x) > q_2(x)$ sağlanır ve p, $q_1$ve q_2 sürekli fonksiyonlardır. O halde Sturm-Karşılaştırma Teoremi gereğince (5) in herhangi bir $y(x)$ çözümünün iki sıfır yeri arasında (4) ün bir çözümünün en az bir sıfır yeri vardır. (5) in bir çözümü $y(x) = \sin(\ln x)$ olarak verildiğine göre ve 1 ve e^π, $y(x)$ çözümünün ardışık iki sıfır yeri olduğuna göre Sturm-Karşılaştırma teoremine göre (4) ün herhangi bir çözümü $(1, e^\pi)$ aralığında en az bir sıfır yerine sahip olacaktır.

Örnek 3. $y'' + (m^2 + 3e^{\cosh x})y = 0$ denkleminin herhangi bir $y(x)$ çözümünün $[0, \infty)$ aralığında sonsuz sayıda sıfır yerine sahip olduğunu gösteriniz ($m > 0$ sabit).

Çözüm:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] + (m^2 + 3e^{\cosh x})y = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] + m^2 y = 0 \tag{2}$$

denklemlerini ele alalım. $p(x) = 1$, $q_1(x) = m^2 + 3e^{\cosh x}$, $q_2(x) = m^2$ olmak üzere verilen aralıkta p, $q_1$ve q_2 sürekli fonksiyonlardır ve $p(x) = 1 > 0$, $q_1(x) > q_2(x)$ sağlanır. Şimdi çözümü (1) den nispeten daha kolay olan (2) denklemini çözersek

$$y(x) = c_1 \cos mx + c_2 \sin mx$$

elde edilir. $c_1 = 0$ ve $c_2 = 1$ alalım. $\phi(x) = \sin mx$ in sıfır yerlerini bulalım.

$$\sin mx = 0 \implies x_k = \frac{k\pi}{m}, \; k = 0, \; \pm 1, \; \pm 2, ...$$

(2) nin çözümü olan $\phi(x)$ in $[0, \infty)$ aralığında sonsuz sayıda sıfır yeri vardır. Sturm-Karşılaştırma Teoreminden dolayı bu $\phi(x)$ çözümünün ardışık iki sıfır yeri arasında (1) in çözümü olan $y(x)$ in en az bir sıfır yeri olacağından, $y(x)$ in $[0, \infty)$ aralığında sonsuz sayıda sıfır yeri vardır.