Reküranks Bağıntıları:

k ve p reel sabitler olmak üzere $J_k(x)$ Bessel fonksiyonu aşağıdaki bağıntıları gerçekler.

a) $\dfrac{d}{dx}\left[x^k J_k(px)\right] = px^k J_{k-1}(px)$

b) $\dfrac{d}{dx}\left[x^{-k} J_k(px)\right] = -px^{-k} J_{k+1}(px)$

c) $\dfrac{d}{dx}\left[J_k(px)\right] = pJ_{k-1}(px) - \dfrac{k}{x} J_k(px)$

d) $\dfrac{d}{dx}\left[J_k(px)\right] = -pJ_{k+1}(px) + \dfrac{k}{x} J_k(px)$

e) $\dfrac{d}{dx}\left[J_k(px)\right] = \dfrac{p}{2}\left[J_{k-1}(px) - J_{k+1}(px)\right]$

f) $J_k(px) = \dfrac{px}{2k}\left[J_{k-1}(px) + J_{k+1}(px)\right]$

g) $J_{1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x$, $\qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x$

Örnek 1. $\displaystyle\int_0^x t^n J_{k+1}(pt)dt = \frac{k+n}{p}\int_0^x t^{n-1} J_k(pt)dt - \frac{x^n}{p} J_k(px)$ $(n > 0,\ k \geq 0)$olduğunu gösteriniz.

Çözüm: b) eşitliği düzenlenirse,

$$J_{k+1}(pt) = -\frac{1}{p} t^k \frac{d}{dt}\left[t^{-k} J_k(pt)\right]$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanını t^n ile çarpıp 0 dan x e integre edersek,

$$\int_0^x t^n J_{k+1}(pt)dt = -\frac{1}{p}\int_0^x t^{n+k}\frac{d}{dt}\left[t^{-k} J_k(pt)\right] dt$$

bulunur. Kısmi integrasyon yapılarak,

$$\begin{aligned}
\int_0^x t^n J_{k+1}(pt)dt &= -\frac{1}{p}\left\{ t^n J_k(pt)\Big|_0^x - (n+k)\int_0^x t^{n-1}\frac{d}{dt} J_k(pt)dt \right\} \\
&= \frac{k+n}{p}\int_0^x t^{n-1} J_k(pt)dt - \frac{x^n}{p} J_k(px)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2. Aşağıdaki bağıntıların doğru olduğunu gösteriniz.

$$\textbf{1)} \quad \int_0^x J_1(ax)dx = \tfrac{1}{a}[1 - J_0(ax)]$$

$$\textbf{2)} \quad \int_0^x J_2(ax)dx = \int_0^x J_0(ax)dx - \tfrac{2}{a}J_1(ax)$$

Çözüm:

1) Yukarıda "b" ile verilen şekildeki bağıntıda

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-k}J_k(px)\right] = -px^{-k}J_{k+1}(px)$$

$k = 0$ ve $p = a$ alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[J_0(ax)\right] &= -aJ_1(ax) \\ J_1(ax) &= -\frac{1}{a}\frac{d}{dx}\left[J_0(ax)\right] \qquad (*) \end{aligned}$$

elde edilir. (*) ifadesi 0 dan x e integre edilirse

$$\int_0^x J_1(ax)dx = -\frac{1}{a}\int_0^x \frac{d}{dx}\left[J_0(ax)\right] = -\frac{1}{a}[J_0(ax) - J_0(0)] = \frac{1}{a}[1 - J_0(ax)]$$

gösterilmiş olur.

2) Yukarıda "e" ile verilen şekildeki bağıntıda

$$\frac{d}{dx}\left[J_k(px)\right] = \frac{p}{2}\left[J_{k-1}(px) - J_{k+1}(px)\right]$$

$k = 1$ ve $p = a$ alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[J_1(ax)\right] &= \frac{a}{2}\left[J_0(ax) - J_2(ax)\right] \\ J_2(ax) &= J_0(ax) - \frac{2}{a}\frac{d}{dx}\left[J_1(ax)\right] \qquad (*) \end{aligned}$$

elde edilir. (*) ifadesi 0 dan x e integre edilirse

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^x J_2(ax)dx &= \int\limits_0^x (J_0(ax) - \frac{2}{a}\frac{d}{dx}\left[J_1(ax)\right])dx \\
&= \int\limits_0^x J_0(ax)dx - \frac{2}{a}(J_1(ax))\,|_0^x \\
&= \int\limits_0^x J_0(ax)dx - \frac{2}{a}J_1(ax) + \frac{2}{a}J_1(0) \\
&= \int\limits_0^x J_0(ax)dx - \frac{2}{a}J_1(ax) \qquad (1)
\end{aligned}$$

elde edilir.