Legendre Polinomlarının Dikliği:

$P_n(x)$ Legendre polinomları $[-1,1]$ aralığında $\omega(x)=1$ ağırlık fonksiyonuna göre diktirler.

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad , \quad m \neq n$$

sağlanır.

Bunu ispat edebilmek için Legendre diferensiyel denklemini ele alalım. P_m ve P_n Legendre polinomları olduklarına göre Legendre diferensiyel denklemini sağlayacaklardır.

$$\left(1-x^2\right)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0$$

$$\left(1-x^2\right)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

Bu eşitliklerden birincisini P_n ile, ikincisini P_m ile çarpar ve taraf tarafa çıkartırsak

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\left(P_nP_m' - P_mP_n'\right)\right] = (n-m)(n+m+1)P_mP_n$$

elde edilir. Bu son eşitliğin her iki yanının $[-1,1]$ aralığında integre edildiğinde eşitliğin sağ tarafının sıfır olması dikkate alınırsa,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad , \quad m \neq n$$

elde edilir.

$m=n$ için Legendre polinomunun normu

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^{1} \left[P_n(x)\right]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

dir.

Legendre Serileri:

$f(x)$ fonksiyonu Legendre polinomları cinsinden

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

şeklinde bir Legendre serisine açılabilir. Buradaki c_n katsayıları

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx$$

dir.

Özel Haller

1) $f(x)$ çift ise, $c_{2k} = (4k+1) \int_0^1 f(x) P_{2k}(x) dx$ ve $c_{2k+1} = 0$ dır.

2) (x) tek ise, $c_{2k} = 0$ ve $c_{2k+1} = (4k+3) \int_0^1 f(x) P_{2k+1}(x) dx$ dir.

Örnek 1. Legendre polinomu için $(2n+1)\, x P_n(x) = (n+1) P_{n+1}(x) + n P_{n-1}(x)$ bağıntısı bilindiğine göre, bu bağıntıdan yararlanarak

$$\int_{-1}^{1} x^2 P_{2m}(x) P_{2m+2}(x) dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: Legendre polinomlarının diklik bağıntısından,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad , \quad m \neq n$$

olduğunu biliyoruz. $(2n+1)\, x P_n(x) = (n+1) P_{n+1}(x) + n P_{n-1}(x)$ bağıntısında $n \to 2m$ ve

$n \to 2m+2$ için integral düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{-1}^{1} xP_{2m}(x)xP_{2m+2}(x)dx \\
= &\int\limits_{-1}^{1} \left\{\frac{2m+1}{4m+1}P_{2m+1}(x)+\frac{2m}{4m+1}P_{2m-1}(x)\right\}\left\{\frac{2m+3}{4m+5}P_{2m+3}(x)+\frac{2m+2}{4m+5}P_{2m-1}(x)\right\}dx \\
= &\frac{2m+1}{4m+1}\frac{2m+3}{4m+5}\int\limits_{-1}^{1} P_{2m+1}(x)P_{2m+3}(x)dx+\frac{2m+1}{4m+1}\frac{2m+2}{4m+5}\int\limits_{-1}^{1} P_{2m+1}^2(x)dx \\
&+\frac{2m}{4m+1}\frac{2m+2}{4m+5}\int\limits_{-1}^{1} P_{2m-1}(x)P_{2m+3}(x)dx+\frac{2m}{4m+1}\frac{2m+2}{4m+5}\int\limits_{-1}^{1} P_{2m-1}(x)P_{2m+1}(x)dx \\
= &\frac{2m+1}{4m+1}\frac{2m+2}{4m+5}\int\limits_{-1}^{1} P_{2m+1}^2(x)dx
\end{aligned}
$$

olup Legendre polinomunun normundan,

$$
\int\limits_{-1}^{1} x^2P_{2m}(x)P_{2m+2}(x)dx=\frac{2m+1}{4m+1}\frac{2m+2}{4m+5}\frac{2}{4m+3}
$$

elde edilir.