

FİZ304 İSTATİSTİK FİZİK VE TERMODİNAMİK

“Klasik Yaklaşımda Kanonik Dağılım II”

Prof.Dr. Orhan ÇAKIR

Ankara Üniversitesi, Fizik Bölümü

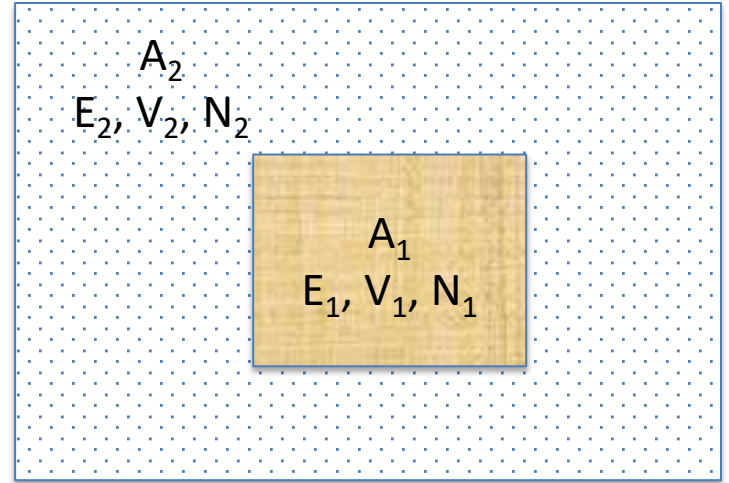
2017

Isı Deposuna Deęen Sistem

Küçük bir sistem A_1 , büyük bir sistemle A_2 ısısal etkileşimde olsun. Burada karakteristik özellikler:

- A_1 serbestlik derecesi A_2 ' ninkinden daha azdır.
- $E_2 \gg E_1$
- $N_2 \gg N_1$
- $N_1 = \text{sabit}$
- $N_2 = \text{sabit}$
- $E_1 + E_2 = E = \text{sabit}$

Bu iki sistem birbiriyle T sıcaklığında dengede olsun. A_1 sisteminin dağılım fonksiyonu $\rho_1(q,p)$ ne olur?



Dağılım fonksiyonu:

$$\rho_1(q(1), p(1)) = \frac{\Omega_2(E)}{\Omega(E)} e^{-\frac{H_1}{k_B T}}$$
$$\rho_1(q(1), p(1)) = \frac{e^{-\frac{H_1(q(1), p(1))}{k_B T}}}{\int d\Gamma_1 e^{-\frac{H_1(q(1), p(1))}{k_B T}}}$$

Eşbölüşüm Uygulamaları

İdeal bir gaz içindeki molekülün kinetik enerjisi

$$\varepsilon = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m$$

ile verilir. Eş bölüşüm teoremine (klasik istatistik mekanikte tanımlanan bir sistem, T mutlak sıcaklığında dengede ise, her kuadratik terimin ortalaması $1/2kT$ ye eşittir) göre enerji ortalaması aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varepsilon = (3/2)kT$$

- Bir mol gaz Avagadro sayısı (N_A) kadar molekülden oluştuğundan gazın ortalama enerjisi

$$\bar{E} = N_A(3/2)kT = (3/2)RT \quad (\text{burada } R = N_A k \text{ olan gaz sabitidir})$$

- Sabit hacimdeki öz ısı

$$C_V = (dE/dT)_V = (3/2)R \text{ olur.}$$

Akışkan İçindeki Küçük Parçacık

Küçük parçacığın **Brown hareketine** karşı gelen durumu anlatmak için, T sıcaklığındaki bir akışkanın içinde yüzen m kütleli makroskopik bir parçacık gözönüne alalım. Parçacığın enerjisi

$$\varepsilon = (1/2m)(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \varepsilon'$$

yazılabilir. Birinci terim parçacığın kinetik enerjisi, diğer terim ise kütle merkezine göre hareketin enerjisidir. Eşbölüşüm teoreminin sonuçlarına göre, hız bileşeninin karesinin ortalaması $\langle v_x^2 \rangle = kT/m$ dir. İzotropiden (simetrik) dolayı hız bileşeninin ortalaması $\langle v_x \rangle = 0$ olur. Böylece $(\Delta v_x)^2 = \langle v_x^2 \rangle - \langle v_x \rangle^2$ hız dalgalanmasının bir ölçüsünü verir. Parçacık durgun değildir ve dalgalanma gösteren bir hıza sahiptir. Ancak, burada m kütlesi yeteri kadar büyük olursa dalgalanmalar da önemsenmeyecek kadar küçük olacaktır.

Eşbölüşüm Uygulamaları

- Tek boyutta basit harmonik salınım yapan, m kütleli bir parçacığın enerjisi (kinetik + potansiyel)

$$\varepsilon = p_x^2/2m + ax^2/2$$

Salınıcının klasik istatistik mekanik ile tanımlanabilmesi için yeterince yüksek bir T sıcaklığında bir ısı deposu ile ısısal dengede olması gerekir.

- Eşbölüşüm teoremi yukarıdaki terimlere uygulandığında, salınıcının ortalama enerjisi

$$\varepsilon^- = (1/2)kT + (1/2)kT = kT$$

bulunur.

- **Klasik yaklaşımın geçerliliği**, bir atomun salınım hareketi ile yorumlanabilir, momentum $p_0 \approx (mkT)^{1/2}$ ve konum $s_0 \approx (kT/a)^{1/2}$ alınırsa $s_0 \cdot p_0 = kT(m/a)^{1/2} \gg \hbar$ veya $kT \gg \hbar\omega$ olmalıdır.

Katıların Öz ısısı

- Yüksek sıcaklıkta katıların öz ısısını bulabilmek için, N atomdan oluşan bir katıda her atomun kendi denge konumu etrafında küçük salınım yaptığını düşünelim (ilk yaklaşımda geri çağırıcı kuvvet, yerdeğiştirme ile orantılıdır). Bu yaklaşıma göre, atom denge konumu etrafında üç boyutta basit harmonik hareket yapar.

- Enerji $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ şeklinde yazılabilir.

- Herbir doğrultudaki hareket için enerji

- $\varepsilon_j = p_j^2/2m + ax_j^2/2$

verilir. Ortalama enerji $\varepsilon^- = 3kT$ olarak bulunur. Avagadro sayısı kadar atom içeren katının ortalama enerjisi $\bar{E} = 3N_A kT = 3RT$ olur. Bu katının sabit hacimdeki öz ısısı $C_V = (dE/dT)_V = 3R$ elde edilir. Sayısal değeri $C_V = 25$ joule/mol/derece bulunur.

Spektrum Çizgilerinin Genişlemesi

Kapalı bir kaptaki T sıcaklığında, m kütleli atomlardan oluşan bir gaz bulunmaktadır. Atomlar kabın bir penceresinden x doğrultusunda ışık yaymakta ve bu spektroskopta bir spektrum çizgisi olarak görülmektedir. Durgun bir atom ν_0 frekansında bir ışık yaymaktadır. Ancak, hareketli ve hızının v_x bileşeni olan atom Doppler etkisi ile ν frekanslı

$$\nu = \nu_0 (1 + v_x/c)$$

bir ışık yaymaktadır. Spektroskopa gelen ışığın frekansı ν ile $\nu + d\nu$ aralığındadır.

- $\nu - \nu_0 = \nu_0 v_x/c$ olur ve bu ifadenin ortalamasını alınırsa $\langle \nu \rangle - \nu_0 = 0$ bulunur $\rightarrow \langle \nu \rangle = \nu_0$. Ayrıca, $(\nu - \nu_0)^2 = \nu^2 + \nu_0^2 - 2\nu_0 \nu = \nu_0^2 v_x^2/c^2$ olur. Işığın dağılması $\langle (\Delta \nu)^2 \rangle = \langle (\nu - \langle \nu \rangle)^2 \rangle = \langle (\nu - \nu_0)^2 \rangle = \nu_0^2 \langle v_x^2 \rangle / c^2 = \nu_0^2 kT/mc^2$ elde edilir. Standart sapma $\underline{\Delta \nu} = \nu_0/c (kT/m)^{1/2}$ ile verilir. Burada $\underline{\Delta \nu}$ ölçülürse T sıcaklığı elde edilebilir ve ışığı yayınlayan atomun kütlesi bulunabilir.

Tanımların Özeti

- **Faz uzayı:** eksenleri klasik mekaniksel bir sistemi anlatan tüm koordinat ve momentumları tanımlayan bir uzaydır.
- **Maxwell hız dağılımı:** T mutlak sıcaklığında bir gaz içinde hızları v ile $v+dv$ arasında olan moleküllerin ortalama sayısını veren bağıntıdır.
- **Eşbölüşüm:** Klasik olarak tanımlanan bir sistem, T mutlak sıcaklığında dengede ise, enerjisinin her kuadratik teriminin ortalama değeri $\varepsilon = kT/2$ olur.

KAYNAKLAR

(0) İstatistik Fizik ve Termodinamik Ders Notları (FİZ304), Hazırlayan: Orhan Çakır, Ankara Üniversitesi Kütüphanesi Açık Ders Malzemeleri, <https://acikders.ankara.edu.tr/course/view.php?id=634> (son erişim tarihi: 11 Mart 2017). Bu ders notları aşağıda verilen kaynaklardan derlenmiştir. Ayrıntılı bilgi için bu kaynaklara başvurulabilir.

(1) İstatistik Fizik (F. Reif), Berkeley Fizik Dersleri Serisi - Cilt 5, Tercüme: T. N. Durlu, Y. Elerman, Bilim Yayınevi, Bilim Yayınları-43, ISBN: 975-556-054-8.



(2) Fundamentals of Statistical and Thermal Physics, F. Reif, Waveland Press, Inc., Reissued (2009).

