SAYISAL ANALİZ

Sayısal hatalar, gerçek matematiksel işlemler ve değerlerin yaklaşık kullanımlarından ortaya çıkan farklar şeklinde tanımlanabilirler. Bu hataların bir kısmı kişilerin kendilerinden, bir kısmı bilgisayarda kullanılan yazılımlardan, bir kısmı da bilgisayarların doğal olarak sayıları belli bir uzunlukta kesme zorunluluklarından kaynaklanmaktadır.

Mutlak Hata

Bir büyüklüğün gerçek değeri $\bar{x}$ ve onu temsil eden yaklaşık değer x olsun. Bu takdirde

$$e_x = |\bar{x} - x|$$

ifadesine mutlak hata denir.

Bağıl Hata

Mutlak hatanın gerçek değere bölünmesiyle elde edilen hatadır. Ancak her problem için gerçek değeri saptama olanağı yoktur. Bu nedenle bağıl hata genel olarak mutlak hatanın yaklaşık değere bölünmesiyle elde edilir. Yani,

$$r_x = \frac{e_x}{x} \qquad \text{ya da} \qquad \mathrm{r_x} = \frac{\mathrm{e_x}}{\bar{\mathrm{x}}}$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek

$\bar{x} = 1/3,\ x = 0.333$ olduğuna göre mutlak ve bağıl hatayı bulunuz.

Çözüm:

Hesaplayıcının sekiz ondalıklı işlem yaptığı göz önünde bulundurulursa

$\bar{x} = 0{,}33333333$ olur. Buna göre,

$$e_x = |\bar{x} - x| \cong 0.00033333 = 3.3333 \times 10^{-4}$$

$$r_x = \frac{e_x}{\bar{x}} = 0.00099999 \cong 0.001$$

dir.

Örnek

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

serisinin ilk beş terimini kullanarak $\sin(0.5)$ değerine yaklaşınız. Yaklaşımdaki mutlak ve bağıl hatayı bulunuz.

Çözüm:

Şimdi verilen serinin ilk 5 terimini kullanarak $\sin(0.5)$ in yaklaşık değerini hesaplayalım.

$$x = \sin(0.5) = 0.5 - 0.020833 + 0.000260 - 0.000002 + 0$$
$$= 0.479425$$

$\sin(0.5)$in gerçek değeri ise

$$\bar{x} = \sin(0.5) = 0.47926$$

dır. Buna göre mutlak ve bağıl hata

$$e_x = |\bar{x} - x| = 0.000001$$

$$r_x = \frac{e_x}{\bar{x}} = 0.000002$$

bulunur.

Hata Analizi

a.) Veri (Başlangıç) Hataları:

Bu tür hatalar çözümü istenen denklemlere ait matematiksel model oluşturulduğunda ortaya çıkar. Matematiksel modeli mümkün olduğunca basitleştirebilmek için ideal kabuller yapılır. Bu da veri hatalarına neden olur. Veri ölçümlerindeki hatalar, rakamları hatalı kaydetme veya matematiksel sabitlerin, π sayısı gibi , tam olarak temsil edilememesi yüzünden bu tür hatalar ortaya çıkar. Ondalık sayıların bazılarının (devirli kesirler) tam olarak gösterilememesi de bu hatalara sebebiyet verir. Bazı durumlarda on tabanı ile verilen bir sayı bilgisayara geçirilirken hafıza (bellek) yetersizliği sebebiyle tam olarak ifade edilemeyebilir. Bu da veri hatasını oluşturur. Örneğin, 1.98746-lık bir gerçek ölçümün yerine 1.98764 alınması veya π sayısı yerine 3.14 alınması gibi.

b.) Kesme Hataları:

Gerçek veya gerçeğe yakın değerlerin hesaplanması çok fazla veya sonsuz terim alınmasını gerektiriyorsa, bu tür işlemde sonlu sayıda terim alınmasında meydana gelen hata olarak tanımlanmaktadır. Eklenecek her yeni terim yaklaşımı değiştirecek ancak bunu eklemek ya mümkün olmayacak yada eklenen değerin elde edilecek değere etkisi anlamsız olacağı için alınmayan kısmı olarak bilinir. Örneğin;

$$e^{\beta} = 1 + \beta + \frac{\beta^2}{2!} + \dots \frac{\beta^k}{k!} + E$$

yerine

$$e^{\beta} \approx 1 + \beta + \frac{\beta^2}{2!} + \dots + \frac{\beta^k}{k!}$$

alınırsa E bize kesme hatasını verir. Yani sonsuz terimli bir ifade nümerik olarak yazılarak kesme hatası yapılmış olur. Dolayısıyla bu hata veri yanlışlarıyla yapılan işlemlerde oluşur.

Bu hatalar, nümerik analizin daha çok iterasyon metotlarını kullanmasından dolayı ortaya çıkar. Ayrıca

$$\int_0^1 f(x)dx \cong \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{2j-1}{2n}\right); n=1,2,...$$

alınması da kesme hatasına sebep olur.

c.) Yuvarlama Hataları:

Doğru olarak ifade edilebilmesi için gereken hane sayısından daha az hane sayısında kesilen ve kesilirken ; daha fazlası bilinemediği için, kolaylık sağlamak için veya bilgisayar tarafından daha fazlası alınamadığı için ortaya çıkan hata olarak tanımlanmaktadır. Özellikle devirli sayılar dediğimiz ve hangi basamaktan kesersek keselim bir hata ile aldığımız sayılarda ortaya çıkar. Genelde yuvarlatma kesilen noktanın sağında atılan tarafta kalan sayı beş ve üzeri ise alınan kısım bir arttırılarak alınır.

$$12.1234567 = 12.1234568 = 12.123457 = 12.12346$$

$$= 12.235$$

$$= 12.24$$

$$= 12.2$$

$$= 12.$$