İST 417 Lineer Modeller – 11. Hafta

<u>Örnek</u>: Bir çalışmada dönüm başına elde edilen verim ile dönüm başına kullanılan gübre miktarı arasındaki ilişki araştırılıyor ve aşağıdaki tablodaki sonuçlar elde ediliyor.

Dönüm no	Gübre (kg)	Verim(kg)
1	2	20
2	3	22
3	1	10
4	7	52
5	4	35
6	5	42
7	10	84
8	6	70

a. $\hat{\beta} = ?$

b. Dönüm başına 12 kg gübre kullanıldığında elde edilen verimi tahmin ediniz.

a. $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ ve

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}, \quad X'y = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix} \qquad \text{dır.}$$

$n = 8, \quad \sum x_i = 38, \ \sum x_i^2 = 240, \ \sum y_i = 335, \ \sum x_i y_i = 2090$

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 38 \\ 38 & 240 \end{bmatrix}, X'y = \begin{bmatrix} 335 \\ 2090 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{476}\begin{bmatrix} 240 & -38 \\ -38 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5042 & -0.0798 \\ -0.0798 & 0.0168 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5042 & -0.0798 \\ -0.0798 & 0.0168 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 335 \\ 2090 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.125 \\ 8.379 \end{bmatrix}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$\hat{y} = 2.125 + 8.379x$

elde edilir.

b. $x = 12 \quad \Rightarrow \quad \hat{y} = 2.125 + 8.379(12) = 102.673$ bulunur.

<u>Örnek</u>: Aşağıdaki tabloda sınava çalışılan süre (saat) ile sınavdan alınan notlar verilmiştir.

Çalışılan süre (X)	**Sınav sonucu (Y)**
3	10
5	80
8	60
12	95
10	70
6	75
1	5
2	3
4	15
7	55

$\widehat{\beta}$ =?

$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, X'X = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 3 & \cdots & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 58 \\ 58 & 448 \end{bmatrix}, \; X'y = \begin{bmatrix} 468 \\ 3656 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{1116}\begin{bmatrix} 448 & -58 \\ -58 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4014 & -0.0520 \\ -0.0520 & 0.0090 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır ve

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4014 & -0.0520 \\ -0.0520 & 0.0090 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 468 \\ 3656 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.2568 \\ 8.568 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Teorem (Gauss-Markov Teoremi):

Eğer $E(y) = X\beta$ ve $Cov(y) = \sigma^2 I$ ise $\hat{\beta}_j, j = 0,1,\dots,k$ En Küçük Kareler tahmin edicileri diğer bütün yansız lineer tahmin ediciler arasında en küçük varyanslıdır. Bir başka deyişle BLUE (best linear unbiased estimator) dır.

σ^2 nin tahmin edicisi:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i, \quad i = 1,2,\dots,n$$

modelinin daha önce belirtildiği gibi

i. $E(\varepsilon_i) = 0,\; i = 1,2,\dots,n$ ya da $E(y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik}$

ii. $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2,\ i = 1,2,\dots,n$ ya da $Var(y_i) = \sigma^2$

iii. $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0,\ i \neq j$ ya da $Cov(y_i, y_j) = 0$

üç temel varsayımı vardır.

$$\sigma^2 = E[y_i - E(y_i)]^2$$

olarak tanımlanır. i. varsayımı kullanarak

$$E(y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_k x_{ik} = x_i'\beta$$

olduğu görülür. Burada $x_i' = [x_{i1}\ \ x_{i2}\ \ \dots\ \ x_{ik}]$ dır. Böylece

$$\sigma^2 = E[y_i - x_i'\beta]^2$$

olarak da ifade edilir. σ^2 parametresini tahmin etmek için

$$s^2 = \frac{1}{n-k-1}\sum_{i=1}^{n}[y_i - x_i'\beta]^2$$

istatistiği kullanılır. Burada

n: örneklem çapı

k: bağımsız değişkenlerin sayısıdır.

s^2 matris ve vektörler cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{n-k-1}\left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right) = \frac{1}{n-k-1}\left(y' - \hat{\beta}'X'\right)\left(y - X\hat{\beta}\right) \\
&= \frac{1}{n-k-1}\left(y'y - y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}\right) \\
&= \frac{1}{n-k-1}\left(y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}\right) \\
&= \frac{1}{n-k-1}\left(y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X(X'X)^{-1}X'y\right) \\
&= \frac{1}{n-k-1}\left(y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'y\right) = \frac{1}{n-k-1}\left(y'y - \hat{\beta}'X'y\right) \\
&= \frac{SSE}{n-k-1}
\end{aligned}$$

Burada,

$SSE = \left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right) = y'y - \hat{\beta}'X'y$ dır.

Hatırlatma: $E(y'Ay) = tr(A\Sigma) + \mu'A\mu,\ \ E(y) = \mu$

Teorem: $E(y) = X\beta$ ve $Cov(y) = \sigma^2 I$ ise $E(s^2) = E\left(\frac{SSE}{n-k-1}\right) = \sigma^2$

yani, s^2 σ^2 nin yansız bir tahmin edicisidir.

İspat:

$$SSE = \left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right) = y'y - \hat{\beta}'X'y = y'y - ((X'X)^{-1}X'y)'X'y$$
$$= y'y - y'X(X'X)^{-1}X'y = y'[I - X(X'X)^{-1}X']y$$

Karesel formların dağılımından

$$E(SSE) = tr\{[\,I - X(X'X)^{-1}X']\sigma^2 I\} + E(y')[I - X(X'X)^{-1}X']E(y)$$
$$= \sigma^2 tr[\,I - X(X'X)^{-1}X'] + \beta'X'[\,I - X(X'X)^{-1}X']X\beta$$
$$= \sigma^2\{n - tr[X(X'X)^{-1}X']\} + \beta'X'X\beta - \beta'X'X(X'X)^{-1}X'X\beta$$
$$= \sigma^2\{n - tr[X'X(X'X)^{-1}]\} + \beta'X'X\beta - \beta'X'X\beta$$

X’X in boyutu (k+1)x(k+1) olduğundan

$$= \sigma^2\{n - tr\left[I_{(k+1)}\right]\} = \sigma^2\left(n - (k+1)\right) = \sigma^2(n - k - 1)$$

$\Rightarrow E(SSE) = \sigma^2(n - k - 1)$

$\Rightarrow E\left(\frac{SSE}{n-k-1}\right) = \sigma^2$

$\Rightarrow E(s^2) = \sigma^2$