İST 417 Lineer Modeller – 12. Hafta

Yardımcı Teorem: $E(y) = X\beta$ ve $Cov(y) = \sigma^2 I$ ise $\alpha'\beta$ nın BLU tahmin edicisi $\alpha'\hat{\beta}$ dır. Burada $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ β parametresinin LS tahmin edicisidir.

Örnek: Aşağıdaki veri setini kullanarak s^2 yi hesaplayınız.

Gözlem sayısı	**y**	x_1	x_2
1	1	0	2
2	4	2	6
3	2	2	7
4	7	2	6
5	6	4	9
6	8	5	8
7	10	5	7
8	7	6	10
9	8	7	11
10	12	6	9
11	11	8	16
12	15	8	13

Öncelikle $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$ yı hesaplayalım.

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum x_{i1} & \sum x_{i2} \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1}^2 & \sum x_{i1}x_{i2} \\ \sum x_{i2} & \sum x_{i1}x_{i2} & \sum x_{i1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 55 & 104 \\ 52 & 327 & 572 \\ 104 & 572 & 1046 \end{bmatrix} \quad \text{ise}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7077 & 0.0933 & -0.1214 \\ & 0.0827 & -0.0545 \\ simetrik & & 0.0428 \end{bmatrix} \quad \text{olarak hesaplanır.}$$

$$X'y = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{i1}y_i \\ \sum x_{i2}y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 91 \\ 518 \\ 907 \end{bmatrix} \quad \text{olduğundan}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7077 & 0.0933 & -0.1214 \\ & 0.0827 & -0.0545 \\ simetrik & & 0.0428 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 91 \\ 518 \\ 907 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.6203 \\ 1.8974 \\ -0.4588 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$$SSE = y'y - \hat{\beta}'X'y = [1 \;\; 4 \ldots 15] \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ \vdots \\ 15 \end{bmatrix} - [2.6203 \;\; 1.8974 \;\; -0.4588] \begin{bmatrix} 91 \\ 518 \\ 907 \end{bmatrix}$$

$= 873 - 805.1689 = 67.8311$ ve

$$s^2 = \frac{SSE}{n-k-1} = \frac{67.8311}{12-2-1} = 7.5368$$

olarak hesaplanır.

Çoklu Regresyon: Hipotez Testleri ve Güven Aralıkları

$$y = X\beta + \varepsilon$$

ya da

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \quad i = 1,2,\dots,n$$

olmak üzere $y \sim N(X\beta,\ \sigma^2 I),\ X_{nx(p+1)}, rank(X) = p+1 < n$ olduğu varsayılacaktır.

Not: Projeksiyon matrisi P_x ile gösterildiği gibi, hat (şapka) matrisi olarak adlandırılıp H ile de gösterilebilir.

Özellikler:

- Hat matrisi simetriktir.
- Hat matrisi idempotenttir.
- I-P_x matrisi de simetrik ve idempotenttir.

Bir önceki derste

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

olduğu gösterilmişti. Buradan

$$\hat{y} = X\hat{\beta} = X(X'X)^{-1}X'y = P_x y$$

olur.

Not: $X\hat{\beta} = P_x y \ \Rightarrow\ \hat{\beta}'X' = y'P_x$

Çoklu regresyon modeli için:

$SS_{Toplam} = SST$

$$= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n} = y'y - \frac{1}{n}y'Jy = y'\left[I - \frac{1}{n}J\right]y$$

$SS_{Hata} = SSE$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = e'e = \left(y - X\hat{\beta}\right)' \left(y - X\hat{\beta}\right) = y'y - \hat{\beta}' X'y = y'y - y'P_x y$$

$$= y'(I - P_x)y$$

Not: $y = X\beta + \varepsilon \quad \Rightarrow \hat{y} = X\hat{\beta}$

$SS_{Regresyon} = SSR = SST - SSE$

$$= y'\left[I - \tfrac{1}{n}J\right]y - y'(I - P_x)y = y'y - \tfrac{1}{n}y'Jy - y'y + y'P_x y$$

$$= y'\left(P_x - \frac{1}{n}J\right)y$$

Çoklu Lineer Regresyon Modeli için ANOVA Tablosu

Kaynak	**SS**	**df**	**MS**
Regresyon	$SSR = y'\left(P_x - \frac{1}{n}J\right)y$	p-1	$MSR = \frac{SSR}{p-1}$
Hata	$SSE = y'(I - P_x)y$	n-p	$MSE = \frac{SSE}{n-p}$
Toplam	$SST = y'\left[I - \frac{1}{n}J\right]y$	n-1	

Regresyon Katsayıları için F Testi

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0$

$H_1: En\ az\ biri\ sıfırdan\ farklıdır.$

Bu hipotezi $F = \frac{MSR}{MSE}$ test istatistiğini kullanarak sınarız.

Eğer $F_{hesap} > F_{(1-\alpha)}(p-1, n-p) \Rightarrow$ H_0 reddedilir.

$\boldsymbol{\beta_k}$ için Aralık Tahmini:

$$\frac{\widehat{\beta_k} - \beta_k}{\sqrt{Var\left(\widehat{\beta_k}\right)}} \sim t_{(n-p)} \qquad k = 01,2, \dots, p-1$$

$\boldsymbol{\beta_k}$ için %100(1-$\boldsymbol{\alpha}$) Güven Aralığı:

$$\left(\widehat{\beta_k} - t_{\left(n-\frac{\alpha}{2}\right)}(n-p)\sqrt{Var\left(\widehat{\beta_k}\right)},\ \widehat{\beta_k} + t_{\left(n-\frac{\alpha}{2}\right)}(n-p)\sqrt{Var\left(\widehat{\beta_k}\right)}\ \right)$$

olarak bulunur.