ÜSLÜ İFADELER

$a \in R$, $a \neq 0$ ve $n \in Z^{+}$olmak üzere, n tane a sayısının çarpımı olan a^n ifadesine "üslü ifade" denir. a^n ifadesinde ; a'ya "taban", n'ye de "üs(kuvvet)" adı verilir.

$$\underbrace{a.a.a..........a}_{\text{n tane}} = a^n$$

Uyarı: $\underbrace{a+a+a+..........+a}_{\text{n tane}} = n.a$ ve $\underbrace{a.a.a..........a}_{\text{n tane}} = a^n$ olduğu karıştırılmamalıdır.

Örnek:

$4^3 = 4.4.4 = 64$

$3^5 = 3.3.3.3.3 = 243$

$(-2)^4 = (-2).(-2).(-2).(-2) = 16$

$(-5)^3 = (-5).(-5).(-5) = -125$

Üslü İfadelerde İşlemlere Ait Özellikler:

1.$a,b \in R$ ve $a,b \neq 0$ olmak üzere;

$1^n = 1$ $\qquad a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ $\qquad a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n = \dfrac{1^n}{a^n} = \dfrac{1}{a^n}$

$a^1 = a$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n = \dfrac{b^n}{a^n}$

$a^0 = 1$

2. $k.a^n \mp p.a^n = (k \mp p).a^n$

3. $a^x.\,a^y = a^{x+y}$

4. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, $a \neq 0$

5. $a^x.b^x = (a.b)^x$

6. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$, $b \neq 0$

7. $\left(a^{x}\right)^{y} = a^{x.y}$

Örnek:

$25^{0} = 1$ $\qquad$ $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1} = -\frac{5}{2}$

$(-9)^{0} = 1$ $\qquad$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2} = \frac{16}{9}$

$-2014^{0} = -1$ $\qquad$ $(-2)^{-5} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{5} = -\frac{1}{32}$

$(-3)^{-1} = -\frac{1}{3}$

Örnek: $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} + \frac{5^{-1}}{2} = \frac{5}{2} + \frac{\frac{1}{5}}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{10} = \frac{13}{5}$

Örnek: $-\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{4} = -\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} = -(-2)^{4} = -2^{4} = -16$

Örnek: $\frac{9^{x}+9^{x}+9^{x}+9^{x}}{3^{x}+3^{x}}$ ifadesinin eşiti nedir?

çözüm: $\frac{9^{x}+9^{x}+9^{x}+9^{x}}{3^{x}+3^{x}} = \frac{4.9^{x}}{2.3^{x}} = \frac{2.\left(3^{2}\right)^{x}}{3^{x}} = \frac{2.3^{2x}}{3^{x}} = 2.3^{2x-x} = 2.3^{x}$

Örnek: $\frac{5^{80}+5^{85}+5^{90}}{5^{85}+5^{80}+5^{75}} = x$ ise $\frac{x}{125}$ ifadesinin eşiti nedir?

çözüm: $x= \frac{5^{80}+5^{85}+5^{90}}{5^{85}+5^{80}+5^{75}} = \frac{5^{80}.(1+5^{5}+5^{10})}{5^{75}.(5^{10}+5^{5}+1)} = \frac{5^{80}}{5^{75}} = 5^{80-75} = 5^{5}$

Sorulan ifadede x yerine 5^{5} yazılırsa;

$\frac{x}{125} = \frac{5^{5}}{5^{3}} = 5^{5-3} = 5^{2} = 25$ elde edilir.

Örnek: $\dfrac{14^n+6^n+2^n}{7^n+3^n+1}$ ifadesi neye eşittir?

çözüm: $\dfrac{14^n+6^n+2^n}{7^n+3^n+1}=\dfrac{(7.2)^n+(3.2)^n+2^n}{7^n+3^n+1}=\dfrac{7^n.2^n+3^n.2^n+2^n}{7^n+3^n+1}=\dfrac{2^n.(7^n+3^n+1)}{7^n+3^n+1}=2^n$

Örnek: $\dfrac{-9^{-2}.\ 25^{-1}}{125^{-1}.\ 27^{-1}}=?$

çözüm: $\dfrac{-9^{-2}.\ 25^{-1}}{125^{-1}.\ 27^{-1}}=\dfrac{-\left(3^2\right)^{--2}.\left(5^2\right)^{-1}}{\left(5^3\right)^{-1}.\left(3^3\right)^{-1}}=\dfrac{-3^{-4}.5^{-2}}{5^{-3}.3^{-3}}=-\dfrac{5^{3-2}}{3^{4-3}}=-\dfrac{5}{3}$

Örnek: $\dfrac{x^{a+1}}{x^{a-2}}.\left(\dfrac{x^{-a+2}.x^{2a+3}}{x}\right)^{-1}$ ifadesinin eşiti nedir?

çözüm: Tabanı aynı olan üslü ifadeler çarpılırken üsler toplanıyor, bölünürken üsler çıkarılıyordu. Buradan;

$$\frac{x^{a+1}}{x^{a-2}}.\left(\frac{x^{-a+2}.x^{2a+3}}{x}\right)^{-1}=x^{a+1-a+2}.\left(x^{-a+2+2a+3-1}\right)^{-1}=x^3.\left(x^{a+4}\right)^{-1}=x^3.x^{-a-4}=x^{3-a--4}=x^{-a-1}$$

elde edilir.

Örnek: $3^x=2$ olduğuna göre $27^{x+1}-81^x$ ifadesinin değeri kaçtır?

çözüm:

$$\begin{aligned}27^{x+1}-81^x&=\left(3^3\right)^{x+1}-\left(3^4\right)^x=3^{3x+3}-3^{4x}\\&=\left(3^x\right)^3.3^3-\left(3^x\right)^4\\&=2^3.3^3-2^4\\&=200\end{aligned}$$

MUTLAK DEĞER

Bir x reel sayısının mutlak değeri $|x|$ ile gösterilir.

$$|x| = \begin{cases} x\ , \ x>0 \text{ ise} \\ 0\ , \ x=0 \text{ ise} \\ -x,\ x<0 \text{ ise} \end{cases}$$ şeklinde tanımlıdır.

NOT: Sıfırdan farklı her reel sayının mutlak değeri pozitiftir. Yani, mutlak değerli ifadenin sonucu daima pozitif olup en az sıfıra eşit olabilir. Hiçbir zaman negatif bir sayı olamaz.

$|7|=7$ $\qquad |-7|=7$ $\qquad |-2|=|2|=2$ $\qquad |0|=0$

Örnek: $x \in R$ ve $-2<x<4$ olduğuna göre $|x+2|+|x-4|$ ifadesinin eşiti nedir?

çözüm: $-2<x<4 \Rightarrow x+2>0$ ve $x-4<0$ dır. Buradan,

$$|x+2|+|x-4| = x+2-(x-4)$$

$$=x+2-x+4$$

$=6$ olarak bulunur.

Örnek: $x<0<y$ ise $\dfrac{|2x-y|-|2y-x|}{x+y}$ ifadesi neye eşittir?

çözüm: $x<0<y \Rightarrow 2x<0$ ve $2y>0$

$\Rightarrow 2x-y<0$ ve $2y-x>0$'dır. Buradan,

$$\frac{|2x-y|-|2y-x|}{x+y} = \frac{-(2x-y)-(2y-x)}{x+y}$$

$$= \frac{-2x+y-2y+x}{x+y}$$

$$= \frac{-(x+y)}{x+y}$$

$$= -1$$

KÖKLÜ İFADELER

a, b $\in R^+$, $n \in N^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $b^n = a$ ifadesindeki b sayısına a sayısının "n. kuvvetten kökü" denir.

$$b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

şeklinde gösterilir.

NOT:

$\sqrt[2n]{f(x)} \in R$ olmas için $f(x) \geq 0$ olmalıdır.

Her $f(x) \in R$ için $\sqrt[2n+1]{f(x)} \in R'$ dir.

Örnek: $\sqrt{25} \in R$, $\sqrt{0} \in R$, $\sqrt[4]{81} \in R$, $\sqrt[5]{7} \in R$, $\sqrt[9]{0} \in R$, $\sqrt{-3} \notin R$, $\sqrt[3]{-3} \in R$

Örnek:

$\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$ $\qquad$ $\sqrt{75} = \sqrt{5^2.3} = 5\sqrt{3}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{10}\right)^3} = \frac{1}{10}$

$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$ $\qquad$ $\sqrt{108} = \sqrt{6^2.3} = 6\sqrt{3}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{2^4.3} = 2\sqrt[4]{3}$

$\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$ $\qquad$ $\sqrt{48} = \sqrt{2^2.2^2.3} = 2.2.\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ $\qquad$ $\sqrt{6,4} = \sqrt{\frac{64}{10}} = \sqrt{\frac{8^2}{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}}$

Köklü Sayılarda İşlemlere Ait Özellikler:

1. $k.\sqrt[n]{a} \mp p.\sqrt[n]{a} = (k \mp p).\sqrt[n]{a}$

2. $(k.\sqrt[n]{a}).(p.\sqrt[n]{b}) = (k.p).\sqrt[n]{a.b}$

3. $\dfrac{k.\sqrt[n]{a}}{p.\sqrt[n]{b}} = \dfrac{k}{p}.\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $p, b \neq 0$

4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

5. $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n b}} = \sqrt[m.n]{a^n.b}$

6. $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$

7. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

8. n tek ise: $\sqrt[n]{a^n.b} = a.\sqrt[n]{b}$

n çift ise: $\sqrt[n]{a^n.b} = |a|.\sqrt[n]{b}$

Örnek:

$$\sqrt{0,64}+\sqrt{0,04}-\sqrt[3]{0,027}=\sqrt{\frac{64}{100}}+\sqrt{\frac{4}{100}}-\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{8}{10}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{2}{10}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\frac{3}{10}\right)^3}$$

$$=\frac{8}{10}+\frac{2}{10}-\frac{3}{10}$$

$$=\frac{7}{10}$$

$$=0,7$$

Örnek:

$$\frac{\sqrt{75}-\sqrt{27}+\sqrt{12}}{\sqrt{108}+\sqrt{48}}=\frac{\sqrt{5^2.3}-\sqrt{3^2.3}+\sqrt{2^2.3}}{\sqrt{6^2.3}+\sqrt{4^2.3}}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{6\sqrt{3}+4\sqrt{3}}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{10\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2}{5}$$

Örnek: $\sqrt{2}.(\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{32}+\sqrt{8}) = \sqrt{36}+\sqrt{100}-\sqrt{64}+\sqrt{16}$ $=6+10-8+4$ $=12$

Örnek: $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{\frac{1}{2}}} = \sqrt[5]{\dfrac{16}{\frac{1}{2}}} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

Örnek: $\sqrt{25-25x^2} - \sqrt{64-64x^2} = \sqrt{25(1-x^2)} - \sqrt{64(1-x^2)}$

$$= 5\sqrt{1-x^2} - 8\sqrt{1-x^2}$$

$$= -3\sqrt{1-x^2}$$

Örnek: $\sqrt[3]{2\sqrt{\sqrt[3]{4}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{2^{2.3}.4}}} = \sqrt[3.2.3]{2^6.2^2} = \sqrt[18]{2^8} = \sqrt[9]{2^4} = 2^{\frac{4}{9}}$

Örnek: a>0 olmak üzere; $\left(\sqrt[5]{a^2}\right)^4$ ifadesinin eşiti nedir?

çözüm: $\left(\sqrt[5]{a^2}\right)^4 = \sqrt[5]{a^8} = \sqrt[5]{a^5.a^3} = a\sqrt[5]{a^3}$

Örnek: a<0 olmak üzere; $\sqrt{a^2} + \sqrt{(-a)}^2 - \sqrt{4a^2}$ ifadesinin eşiti nedir?

çözüm:

$a<0 \Rightarrow |a| = -a$

$a<0 \Rightarrow -a>0,\ |-a| = -a'$ dır. Buna göre;

$\sqrt{a^2} + \sqrt{(-a)}^2 - \sqrt{4a^2} = |a| + \sqrt{(-a)^2} - \sqrt{(2a)^2}$

$$= |a| + |-a| - |2a|$$

$= -a + (-a) - (-2a) = -a - a + 2a = 0$ olarak bulunur.

Eşlenik İfadeler:

$\sqrt{a}$' nın eşleniği: $\sqrt{a}$

$\sqrt{a} + \sqrt{b}$' nin eşleniği: $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

$\sqrt{a} - \sqrt{b}$' nin eşleniği: $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

Paydanın Kökten Kurtarılması:

Kesirli bir ifadenin paydası köklü ise, paydayı kökten kurtarmak için; paydanın eşleniği ile hem pay hem de payda çarpılır.

Örnek:

$$\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$
$(\sqrt{6})$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{5^2}-\sqrt{3^2}} = \frac{2\sqrt{15}+6}{5-3} = \frac{2(\sqrt{15}+3)}{2} = \sqrt{15}+3$$
$(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

Örnek: $$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3^2}-\sqrt{2^2}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} - \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{2} = \sqrt{3}$$
$(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ $(\sqrt{2})$

Örnek: $\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)^{-1} \Rightarrow$ x=?

çözüm: $\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)^{-1} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{x}$

olur. Bulduğumuz son eşitliğin sol tarafında paydaları eşitlersek;

$\Rightarrow \frac{3-2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{x}$ olur. Buradan,

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{x}$$

$$\Rightarrow x=6$$

Örnek: a>0 ve b<0 ise, $\sqrt{(b-a)^2} - \sqrt{(2a-b)^2}$ ifadesinin eşiti nedir?

çözüm: a>0, b<0 ise: b-a<0 ve 2a $-$b>0'dır. Buradan,

$$\sqrt{(b-a)^2} - \sqrt{(2a-b)^2} = |b-a| - |2a-b|$$

$$= -(b-a)-(2a-b)$$

$$= -b+a-2a+b$$

$$= -a$$

----------------------------**0**----------------------------